

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE KATEGORIE

DER GEORDNETEN MENGEN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Peter R i n g l e b

aus Berlin

1969

Druck:
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE KATEGORIE

DER GEORDNETEN MENGEN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Peter R i n g l e b

aus Berlin

1. Referent: Privatdozent Dr. H. Herrlich

2. Referent: Professor Dr. K. P. Grotemeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Juli 1969

Tag der Promotion:

6. OKT. 1969



1991 1992 1993 1994 1995 1996 1997 1998 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024 2025 2026 2027 2028 2029 2030 2031 2032 2033 2034 2035 2036 2037 2038 2039 2040 2041 2042 2043 2044 2045 2046 2047 2048 2049 2050 2051 2052 2053 2054 2055 2056 2057 2058 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 2067 2068 2069 2070 2071 2072 2073 2074 2075 2076 2077 2078 2079 2080 2081 2082 2083 2084 2085 2086 2087 2088 2089 2090 2091 2092 2093 2094 2095 2096 2097 2098 2099 2100 2101 2102 2103 2104 2105 2106 2107 2108 2109 2110 2111 2112 2113 2114 2115 2116 2117 2118 2119 2120 2121 2122 2123 2124 2125 2126 2127 2128 2129 2130 2131 2132 2133 2134 2135 2136 2137 2138 2139 2140 2141 2142 2143 2144 2145 2146 2147 2148 2149 2150 2151 2152 2153 2154 2155 2156 2157 2158 2159 2160 2161 2162 2163 2164 2165 2166 2167 2168 2169 2170 2171 2172 2173 2174 2175 2176 2177 2178 2179 2180 2181 2182 2183 2184 2185 2186 2187 2188 2189 2190 2191 2192 2193 2194 2195 2196 2197 2198 2199 2200 2201 2202 2203 2204 2205 2206 2207 2208 2209 2210 2211 2212 2213 2214 2215 2216 2217 2218 2219 2220 2221 2222 2223 2224 2225 2226 2227 2228 2229 2230 2231 2232 2233 2234 2235 2236 2237 2238 2239 2240 2241 2242 2243 2244 2245 2246 2247 2248 2249 2250 2251 2252 2253 2254 2255 2256 2257 2258 2259 2260 2261 2262 2263 2264 2265 2266 2267 2268 2269 2270 2271 2272 2273 2274 2275 2276 2277 2278 2279 2280 2281 2282 2283 2284 2285 2286 2287 2288 2289 2290 2291 2292 2293 2294 2295 2296 2297 2298 2299 2300 2301 2302 2303 2304 2305 2306 2307 2308 2309 2310 2311 2312 2313 2314 2315 2316 2317 2318 2319 2320 2321 2322 2323 2324 2325 2326 2327 2328 2329 2330 2331 2332 2333 2334 2335 2336 2337 2338 2339 2340 2341 2342 2343 2344 2345 2346 2347 2348 2349 2350 2351 2352 2353 2354 2355 2356 2357 2358 2359 2360 2361 2362 2363 2364 2365 2366 2367 2368 2369 2370 2371 2372 2373 2374 2375 2376 2377 2378 2379 2380 2381 2382 2383 2384 2385 2386 2387 2388 2389 2390 2391 2392 2393 2394 2395 2396 2397 2398 2399 2400 2401 2402 2403 2404 2405 2406 2407 2408 2409 2410 2411 2412 2413 2414 2415 2416 2417 2418 2419 2420 2421 2422 2423 2424 2425 2426 2427 2428 2429 2430 2431 2432 2433 2434 2435 2436 2437 2438 2439 2440 2441 2442 2443 2444 2445 2446 2447 2448 2449 2450 2451 2452 2453 2454 2455 2456 2457 2458 2459 2460 2461 2462 2463 2464 2465 2466 2467 2468 2469 2470 2471 2472 2473 2474 2475 2476 2477 2478 2479 2480 2481 2482 2483 2484 2485 2486 2487 2488 2489 2490 2491 2492 2493 2494 2495 2496 2497 2498 2499 2500 2501 2502 2503 2504 2505 2506 2507 2508 2509 2510 2511 2512 2513 2514 2515 2516 2517 2518 2519 2520 2521 2522 2523 2524 2525 2526 2527 2528 2529 2530 2531 2532 2533 2534 2535 2536 2537 2538 2539 2540 2541 2542 2543 2544 2545 2546 2547 2548 2549 2550 2551 2552 2553 2554 2555 2556 2557 2558 2559 2560 2561 2562 2563 2564 2565 2566 2567 2568 2569 2570 2571 2572 2573 2574 2575 2576 2577 2578 2579 2580 2581 2582 2583 2584 2585 2586 2587 2588 2589 2590 2591 2592 2593 2594 2595 2596 2597 2598 2599 2600 2601 2602 2603 2604 2605 2606 2607 2608 2609 2610 2611 2612 2613 2614 2615 2616 2617 2618 2619 2620 2621 2622 2623 2624 2625 2626 2627 2628 2629 2630 2631 2632 2633 2634 2635 2636 2637 2638 2639 2640 2641 2642 2643 2644 2645 2646 2647 2648 2649 2650 2651 2652 2653 2654 2655 2656 2657 2658 2659 2660 2661 2662 2663 2664 2665 2666 2667 2668 2669 2670 2671 2672 2673 2674 2675 2676 2677 2678 2679 2680 2681 2682 2683 2684 2685 2686 2687 2688 2689 2690 2691 2692 2693 2694 2695 2696 2697 2698 2699 2700 2701 2702 2703 2704 2705 2706 2707 2708 2709 2710 2711 2712 2713 2714 2715 2716 2717 2718 2719 2720 2721 2722 2723 2724 2725 2726 2727 2728 2729 2730 2731 2732 2733 2734 2735 2736 2737 2738 2739 2740 2741 2742 2743 2744 2745 2746 2747 2748 2749 2750 2751 2752 2753 2754 2755 2756 2757 2758 2759 2760 2761 2762 2763 2764 2765 2766 2767 2768 2769 2770 2771 2772 2773 2774 2775 2776 2777 2778 2779 2780 2781 2782 2783 2784 2785 2786 2787 2788 2789 2790 2791 2792 2793 2794 2795 2796 2797 2798 2799 2800 2801 2802 2803 2804 2805 2806 2807 2808 2809

Literatur 56



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Im Jahr 1937 regte ALEXANDROFF [1] an, geordnete Mengen mit gewissen topologischen Räumen zu identifizieren. Wir greifen diese Anregung in § 1 auf, zeigen, daß diese Zuordnung funktoriell ist und daß die Kategorie $\mathcal{G}$ der geordneten Mengen und monotonen Abbildungen zu einer vollen Unterkategorie der Kategorie Top der topologischen Räume und stetigen Abbildungen isomorph ist. Die Kategorie $\mathcal{S}$ der halbgeordneten Mengen und monotonen Abbildungen erweist sich ebenfalls als isomorph zu einer vollen Unterkategorie von Top . Mit Hilfe dieser Isomorphismen formulieren wir ordnungstheoretische Eigenschaften in der Sprache der Topologie und studieren gewisse reflektive Unterkategorien von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{S}$. Weitere Anwendungen dieser Theorie finden sich in § 3, wo systematisch die Morphismen in den Kategorien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{S}$ sowie in der Kategorie $\mathcal{V}$ der Verbände und Verbandshomomorphismen, der Kategorie $\mathcal{T}$ der total geordneten Mengen und monotonen Abbildungen und der Kategorie $\mathcal{B}$ der Booleschen Algebren und Booleschen Homomorphismen untersucht werden.

In § 2 referieren wir die wichtigsten Eigenschaften der MacNeilleschen Vervollständigung, da wir diese in späteren Paragraphen als Hilfsmittel benötigen. Wir werfen dort ferner die Frage auf, ob die Kategorie $\mathcal{V}$ der vollständigen Verbände und stark sup-treuen Abbildungen reflektiv ist in der Kategorie $\mathcal{G}$ bzw. in der Kategorie $\mathcal{G}$ der geordneten Mengen und stark sup-treuen Abbildungen. Wir zeigen anhand eines Beispiels, daß $\mathcal{V}$ nicht vermittels der MacNeilleschen Konstruktion in $\mathcal{G}$ reflektiv sein kann, wie von BOURBAKI [4] behauptet wird. In § 5 weisen wir nach, daß $\mathcal{V}$ sowohl in $\mathcal{G}$ wie auch in $\mathcal{G}$ reflektiv ist. Wir zeigen überdies, daß auch die Kategorie $\mathcal{G}$ sup-abgeschlossener Mengen und sup-treuer Abbildungen in $\mathcal{G}$ reflektiv ist. Die Konstruktion, mit deren Hilfe die Reflektivität von $\mathcal{V}$ in $\mathcal{G}$ nachgewiesen wird, wurde kürzlich in einer unabhängig von dieser Arbeit verfaßten Note von DERDERIAN [6] veröffentlicht; allerdings finden sich dort keine Hinweise auf die Struktur und die kategorielle Bedeutung dieser Konstruktion.

In § 4 studieren wir projektive und injektive Objekte der Kategorie $\mathcal{Q}$, zeigen, daß die üblichen Definitionen unzweckmäßig und der Algebra zu sehr entlehnt sind und führen den Begriff des extrem-projektiven bzw. extrem-injektiven Objekts ein; wir haben uns hierbei von den kategoriellen Betrachtungen hinsichtlich von Unterobjekten und Quotientenobjekten in HERRLICH [10] leiten lassen. Während nur die einelementigen geordneten Mengen injektiv in $\mathcal{Q}$ sind, stellt sich heraus, daß genau die Klasse der vollständigen Verbände mit der Klasse der extrem-injektiven Objekte von $\mathcal{Q}$ übereinstimmt. Dieses Ergebnis wurde unabhängig hiervon auch von BANASCHEWSKI und BRUNS [2] während der Entstehung dieser Arbeit gefunden. Als projektiv bzw. extrem-projektiv erweisen sich allerdings nur die diskret geordneten Mengen. Um eine größere Klasse projektiver Objekte zu gewinnen, führen wir den Begriff des epi-zusammenhängend-projektiven Objekts ein.

Aus der mengentheoretischen Topologie ist die Wallmansche Quasikompaktifizierung von T_1 -Räumen wohlbekannt; ebenso ist auch bekannt, daß diese Konstruktion nicht funktoriell ist. Durch Einführung des Primspektrums $\text{Spec}(V)$ von distributiven Verbänden V modifizieren wir in § 6 das Wallmansche Verfahren und gewinnen auf diese Weise zunächst einen Kofunktor von der Kategorie $\mathcal{V}_0$ der distributiven Verbände mit 0 und 1 und Verbandshomomorphismen, die 0 in 0 und 1 in 1 überführen, in die Kategorie der quasikompakten T_0 -Räume und stetigen Abbildungen; nach Komposition mit dem Funktor der T_2 -Reflexion erhalten wir einen Kofunktor von $\mathcal{V}_0$ in die Kategorie $\mathcal{K}$ der kompakten topologischen Räume und stetigen Abbildungen. Mit Hilfe geeigneter Kofunktoren von Top in $\mathcal{V}_0$ zeigen wir Anwendungen der Theorie auf. Wir weisen ferner nach, daß man alle Kompaktifizierungen, die als Ultrafilterräume von Normalbasen gewonnen werden können, auch mit unserer Konstruktion erhält.

Im Rahmen dieser Betrachtungen kommen wir auf ein Fortsetzungsproblem stetiger Abbildungen zu sprechen: Ist nämlich $(X, \mathcal{X})$ ein T_0 -Raum und $\mathcal{L}$ eine geeignete Basis der abgeschlossenen Mengen, so können wir $(X, \mathcal{X})$ als dichte Teilmenge des Primspektrums $\text{Spec}(\mathcal{L})$ auffassen. Wir zeigen, daß sich eine stetige Abbildung von $(X, \mathcal{X})$ in einen regulären Raum $(Y, \mathcal{Y})$ genau dann stetig auf $\text{Spec}(\mathcal{L})$ fortsetzen läßt, wenn sie

[-stetig ist. Ein ähnlicher Satz wurde von FRINK [7] für Ultrafilterräume bewiesen, jedoch unter Beschränkung auf kompakte Räume ($Y, \mathfrak{O}$).

Zur Terminologie bemerken wir schließlich, daß wir uns an BOURBAKI [4] und [5] anschließen; was kategorielle Begriffe anbelangt, so verweisen wir auf HERRLICH [10] .

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Herrlich für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit; ich danke ebenfalls Herrn Prof. Dr. Grottemeyer für das Interesse an dieser Arbeit und die Förderung derselben.

§ 1. Die Alexandroff-Funktoren

1.1. Def.: $(X, \mathfrak{X})$ sei topologischer Raum. $\mathfrak{X}$ besitzt die DE (= Durchschnittseigenschaft), wenn jeder Durchschnitt offener Mengen offen ist.

1.2. Lemma: $(X, \mathfrak{X})$ besitze die DE. Für jedes $A \subset X$ gilt dann $A^- = \bigcup_{a \in A} \{a\}^-$.

1.3. Lemma: $((X_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ sei eine Familie topologischer Räume mit DE, X sei eine Menge, $f_\alpha: X_\alpha \longrightarrow X$, $\alpha \in I$, eine Familie von Abbildungen. Ist $\mathfrak{X}$ die finale Topologie auf X bezüglich der Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, so besitzt $\mathfrak{X}$ die DE.

1.4. Def.: Wir verabreden folgende Bezeichnungen:

- 1) Die Kategorie $\mathfrak{S}$: Objekte: halbgeordnete Mengen
Morphismen: monotone Abbildungen
- 2) Die Kategorie $\mathfrak{Q}$: Objekte: geordnete Mengen
Morphismen: monotone Abbildungen
- 3) Die Kategorie Top : Objekte: topologische Räume
Morphismen: stetige Abbildungen
- 4) Die Kategorie $\mathfrak{S}$: Objekte: topologische Räume mit DE
Morphismen: stetige Abbildungen
- 5) Die Kategorie Top_0 : Objekte: T_0 -Räume
Morphismen: stetige Abbildungen
- 6) Die Kategorie $\mathfrak{S}_0$: Objekte: T_0 -Räume mit DE
Morphismen: stetige Abbildungen

1.5. Satz: Es gibt Funktoren $H: \text{Top} \longrightarrow \mathfrak{S}$, $D: \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}_0$ mit $(H|D) \circ D = 1_{\mathfrak{S}}$, $D \circ (H|D) = 1_{\mathfrak{S}_0}$. Setzt man überdies $G = H|D$, $T = D|Q$, $K = H|Top_0$, so gilt $K[Top_0] \subset Q$, $T \circ G = 1_{\mathfrak{S}_0}$, $G \circ T = 1_Q$.

Beweis: 1) Definition von H : Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |Top|$, es sei dann $\epsilon = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X, x \in \{y\}^-\}$. ϵ ist offensichtlich reflexiv und transitiv, somit $(X, \epsilon) \in |\mathfrak{S}|$. Ist $f: (X, \mathfrak{X}) \longrightarrow (Y, \mathfrak{Y})$ stetig, so definieren wir $H(f): (X, \epsilon) \longrightarrow (Y, \epsilon)$ durch $H(f) = f$. $H(f)$ ist monoton: Sind $x, y \in X$, $x \epsilon y$, so bedeutet dies $x \in \{y\}^-$, also gilt

$f(x) \in f[\{y\}^-] \subset \{f(y)\}^-$, mithin $f(x) < f(y)$. H ist offenbar ein Funktor.

2) Definition von D : Sei $(X, \leq) \in |\mathcal{G}|$. $\mathcal{R}_\leq$ bezeichne die von der Basis $\{\{x, \rightarrow\} \mid x \in X\}$ erzeugte Topologie; daß dies eine Basis ist, liegt an Reflexivität und Transitivität von $\leq$.

Es gilt $(X, \mathcal{R}_\leq) \in |\mathcal{D}|$: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen; ist $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$, so bedeutet dies $\{x, \rightarrow\} \subset U_i$ für jedes $i \in I$, also gilt auch $\{x, \rightarrow\} \subset \bigcap_{i \in I} U_i$.

Sei $D((X, \leq)) = (X, \mathcal{R}_\leq)$; wir bezeichnen $\mathcal{R}_\leq$ als die Rechtstopologie von $(X, \leq)$. Ist $f: (X, \leq) \rightarrow (Y, <)$ monoton, so definieren wir $D(f): (X, \mathcal{R}_\leq) \rightarrow (Y, \mathcal{R}_<)$ durch $D(f) = f$; $D(f)$ ist stetig: Sei $U \in \mathcal{R}_<$, $x \in f^{-1}[U]$; ist $x \leq y$, so gilt $f(x) < f(y)$, $f(y) \in U$, $y \in f^{-1}[U]$, daher $f^{-1}[U] \in \mathcal{R}_\leq$. D ist offensichtlich ein Funktor.

3) Es gilt $H[\text{Top}_0] \subset \mathcal{G}$: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\text{Top}_0|$, $x, y \in X$. Aus $x \leq y$, $y \leq x$ folgt $\{x\}^- = \{y\}^-$, und dies zieht $x = y$ nach sich.

4) Es gilt $D[\mathcal{G}] \subset \mathcal{D}_0$: Sei $(X, \leq) \in |\mathcal{G}|$; sind $x, y \in X$, $x \neq y$, so gilt etwa $x \not\leq y$, und dies bedeutet $y \notin \{x, \rightarrow\}$.

5) Es gilt $(H[\mathcal{D}]) \circ D = 1_{\mathcal{G}}$: Sei $(X, \leq) \in |\mathcal{G}|$, $(H[\mathcal{D}]) \circ D((X, \leq)) = (X, <)$, wobei $x < y$ äquivalent ist zu $x \in \{y\}^-$. $x \leq y$ ist aber gleichbedeutend mit $x \in \{y, \rightarrow\} = \{y\}^-$, womit alles gezeigt ist.

6) Es gilt $D \circ (H[\mathcal{D}]) = 1_{\mathcal{D}}$: Hierzu beweisen wir einige Lemmata:

1.5.1. Lemma: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\text{Top}|$, dann gilt:

1) $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}_\leq$, wobei $(X, \leq) = H((X, \mathcal{X}))$

2) $\{a\}^\mathcal{X} = \{a\}^\mathcal{R}_\leq$ für jedes $a \in X$.

Beweis: Sei $A = A^\mathcal{X} \subset X$, wir zeigen $A = A^\mathcal{R}_\leq$. Wegen 1.2. gilt $A^\mathcal{R}_\leq = \bigcup_{x \in A} \{x, \rightarrow\} \supset A = A^\mathcal{X} \supset \bigcup_{x \in A} \{x\}^\mathcal{X} \supset A$. Es genügt also zu zeigen, daß $\{a\}^\mathcal{X} = \{a\}^\mathcal{R}_\leq$ für jedes $a \in X$. $x \in \{a\}^\mathcal{X}$ ist äquivalent mit $x \leq a$, $a \in \{x, \rightarrow\}$, so daß $x \in \{a\}^\mathcal{X}$ mit $x \in \{a\}^\mathcal{R}_\leq$ äquivalent ist.

1.5.2. Lemma: Seien $(X, \mathcal{X}), (X, \mathcal{Y}) \in |\text{Top}|$ mit $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$; es sei $H((X, \mathcal{X})) = (X, \leq)$, $H((X, \mathcal{Y})) = (X, <)$. Dann gilt $\mathcal{R}_\leq \subset \mathcal{R}_<$.

Beweis: $1_X: (X, \mathcal{Y}) \rightarrow (X, \mathcal{X})$ ist stetig, nach dem bereits Bewiesenen ist $H(1_X) = 1_X: (X, <) \rightarrow (X, \leq)$ monoton, mithin ist $D(1_X) = 1_X: (X, \mathcal{R}_<) \rightarrow (X, \mathcal{R}_\leq)$ stetig.

1.5.3. Lemma: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$, $\text{DoH}((X, \mathfrak{X})) = (X, \mathfrak{Q}_\epsilon)$. Es gilt dann

$$\mathfrak{Q}_\epsilon = \bigcap_{\substack{\mathfrak{U} \supset \mathfrak{X} \text{ Topologie} \\ \text{auf } X \text{ mit DE}}} \mathfrak{U}$$

Beweis: $\mathfrak{Q}_\epsilon$ besitzt die DE; wir sind offensichtlich am Ziel, wenn wir zeigen können, daß jedes $U \in \mathfrak{Q}_\epsilon$ Durchschnitt von Elementen aus $\mathfrak{X}$ ist. Wir zeigen: Für jedes $U \in \mathfrak{Q}_\epsilon$ gilt $U = \bigcap_{a \in X-U} X - \{a\}^\#$. Sei $x \in U$, $a \in X - U$; wäre $x \in \{a\}^\#$, so hieße dies $x \leq a$, also $a \in U$, mithin muß $x \in X - \{a\}^\#$ gelten. Ist umgekehrt $x \in \bigcap_{a \in X-U} X - \{a\}^\#$, so ist offenbar $x \in X - (X - U) = U$.

1.5.4. Lemma: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$, $\text{DoH}((X, \mathfrak{X})) = (X, \mathfrak{Q}_\epsilon)$. Es gilt genau dann $\mathfrak{X} = \mathfrak{Q}_\epsilon$, wenn $\mathfrak{X}$ die DE besitzt.

Wir beenden nun den Beweis von 1.5.; die Aussage 6) folgt unmittelbar aus 1.5.4., die Beziehung $\text{ToG} = 1_\mathfrak{A}$ erhält man aus 3), 4) und 6), und $\text{GoT} = 1_\mathfrak{A}$ folgt aus 3), 4) und 5).

Wir ziehen nun erste Folgerungen aus diesen Ergebnissen:

1.6. Satz: 1) Zum Inklusionsfunctor $J_\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{Top}$ existiert ein rechtsadjungierter Funktor $R_\mathfrak{A} : \text{Top} \longrightarrow \mathfrak{A}$
 2) Zum Inklusionsfunctor $J_\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{Top}_0$ existiert ein rechtsadjungierter Funktor $R_\mathfrak{A} : \text{Top}_0 \longrightarrow \mathfrak{A}$.
 Es ist also $\mathfrak{A}$ corefektiv in Top , $\mathfrak{A}_0$ corefektiv in Top_0 ; in beiden Fällen handelt es sich um Bi-Coreflexionen.

Beweis: 1) Seien $(X, \mathfrak{X}) \in |\mathfrak{A}|$, $(Y, \mathfrak{Y}) \in |\text{Top}|$. Sei $R_\mathfrak{A} = \text{DoH}$. Ist $f : (X, \mathfrak{X}) \longrightarrow (Y, \mathfrak{Y})$ stetig, so ist $H(f) : (X, \epsilon) \longrightarrow (Y, \epsilon)$ monoton, $\text{DoH}(f) : (X, \mathfrak{X}) \longrightarrow \text{DoH}((Y, \mathfrak{Y})) = D((Y, \epsilon))$ stetig, wobei mengentheoretisch $\text{DoH}(f) = f$.

Umgekehrt: Ist $f : (X, \mathfrak{X}) \longrightarrow (Y, \mathfrak{Q}_\epsilon) = \text{DoH}((Y, \mathfrak{Y}))$ stetig, so ist $f : (X, \mathfrak{X}) \longrightarrow (Y, \mathfrak{Y})$ stetig, da $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Q}_\epsilon$ gemäß 1.5.1. Dies zeigt $M_{\text{Top}}(X, Y) = M_\mathfrak{A}(X, R_\mathfrak{A}(Y))$.

Die Aussage 2) wird analog bewiesen.

1.7. Lemma: Sei $((X_\alpha, \mathfrak{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathfrak{A}$. Das Produkt dieser Familie in $\mathfrak{A}$ hat folgende Gestalt: Sei $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ das mengentheoretische Produkt, $\mathfrak{P}$ die Produkt-

topologie in Top , $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ die Familie der üblichen Projektionen $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$. Ferner sei

$$X = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \supset \mathcal{P} \\ \text{auf } X \text{ mit } \mathcal{O} \\ \text{Topologie}}} \mathcal{B}$$

Dann ist $((X, \mathcal{X}), (p_\alpha)_{\alpha \in I})$ Produkt der Familie $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))$ in $\mathfrak{D}$.

- 1.8. Corollar: 1) Die Kategorie $\mathfrak{D}$ ist niemals reflektive Unterkategorie von Top .
 2) Die Kategorie $\mathfrak{D}_0$ ist niemals reflektive Unterkategorie von Top_0 .

Beweis: Wären diese Kategorien reflektiv, so müßten die Inklusionsfunktoren $J_\mathfrak{D}$ und $J_{\mathfrak{D}_0}$ Produkte in ebensolche überführen, was aber offensichtlich nicht zutrifft.

- 1.9. Satz: 1) Die Kategorie $\mathcal{Q}$ ist epi-reflektiv in $\mathfrak{D}$.
 2) Die Kategorie $\mathfrak{D}_0$ ist epi-reflektiv in $\mathfrak{D}$.

Beweis: Es genügt, 2) zu beweisen. Einen Reflektor $R: \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}_0$ erhält man wie folgt: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\mathfrak{D}|$, π bezeichne die Äquivalenzrelation $\pi = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X, \{x\}^- = \{y\}^-\}$. Es sei $(X/\pi, \mathcal{X}_\pi)$ der Quotientenraum, $\nu : X \longrightarrow X/\pi$ die natürliche Abbildung. Man setze $R((X, \mathcal{X})) = (X/\pi, \mathcal{X}_\nu)$; ν ist Reflexionsmorphismus.

Wir betrachten jetzt speziell die Kategorien $\mathcal{Q}, \mathfrak{D}_0$ und die Funktoren T, G und studieren, wie sich ordnungstheoretische Eigenschaften in Eigenschaften der Rechtstopologie widerspiegeln.

1.10. Satz: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$, $\mathcal{W}$ sei die Rechtstopologie.

- 1) $\mathcal{W}$ genügt dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, genauer: Jeder Punkt besitzt eine einelementige Umgebungsbasis.
 2) $\mathcal{W}$ ist quasikompakt erzeugt, d. h. für $A \subseteq E$ gilt $A = A^-$ genau dann, wenn $A \cap K = (A \cap K)^{\mathcal{W}}$ für jedes quasikompakte $K \subseteq E$.
 3) $(E, \mathcal{W})$ ist genau dann Lindelöf-Raum, wenn es eine abzählbare Familie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in E$ mit folgender Eigenschaft gibt: Zu jedem $x \in E$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß

$x_n \leq x$, was mit $x_n \in \{x\}^-$ äquivalent ist.

- 4) $(E, \mathcal{Q})$ ist genau dann quasikompakt, wenn es $x_1, \dots, x_n \in E$ so gibt, daß zu jedem $x \in E$ ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_k \leq x$ existiert.
- 5) $(E, \mathcal{Q})$ besitzt genau dann eine abzählbare Basis, wenn E abzählbar ist.
- 6) $(E, \mathcal{Q})$ ist genau dann separabel, wenn es eine abzählbare Familie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in E$ mit folgender Eigenschaft gibt: Zu jedem $x \in E$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $x \leq x_n$.
- 7) Es bezeichne ζ die folgende Äquivalenzrelation: Für $x, y \in E$ gelte $x \zeta y$ genau dann, wenn es endlich viele Punkte $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ so gibt, daß x_i und x_{i+1} vergleichbar sind für $i = 0, \dots, n-1$.
Die Äquivalenzklassen bezüglich ζ sind genau die Zusammenhangskomponenten von $(E, \mathcal{Q})$.
 $(E, \mathcal{Q})$ ist also genau dann zusammenhängend, wenn sich je zwei Elemente von E durch eine endliche Familie "verbinden" lassen.
- 8) $(E, \mathcal{Q})$ ist stets lokal zusammenhängend.
- 9) $(E, \mathcal{Q})$ ist genau dann T_1 -Raum, wenn $(E, \mathcal{Q})$ diskret ist, und dies gilt genau dann, wenn $\leq$ die Identität ist.

Beweis: 1) ist unmittelbar einsichtig.

- 2) Sei $A \cap K = (A \cap K)^{\bar{K}}$ für jedes quasikompakte $K \subset E$. Sei $x \in A$, $y \in E$, $y \leq x$. Wir müssen zeigen: $y \in A$. Hierzu betrachten wir $K = \{x, y\}$; offenbar ist $A \cap K = K$.
- 3) Sei $(E, \mathcal{Q})$ Lindelöf-Raum. $(\llbracket x, \rightarrow \rrbracket)_{x \in E}$ ist offene Überdeckung und enthält eine Überdeckung $(\llbracket x_n, \rightarrow \rrbracket)_{n \in \mathbb{N}}$, woraus die angegebene Eigenschaft folgt; die Umkehrung ist trivial.
- 4) ist analog zu 3) zu beweisen.
- 5) Sei α abzählbare Basis von $\mathcal{Q}$. Für jedes $x \in E$ ist $\llbracket x, \rightarrow \rrbracket$ Vereinigung von Elementen aus α , es gibt $U_x \in \alpha$ so, daß $x \in U_x \subset \llbracket x, \rightarrow \rrbracket$. Wegen $U_x \in \mathcal{Q}$ folgt $U_x = \llbracket x, \rightarrow \rrbracket$. E ist daher abzählbar. Die Umkehrung ist trivial.
- 6) Sei $(E, \mathcal{Q})$ separabel, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei dicht. Zu jedem $x \in E$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $x_n \in \llbracket x, \rightarrow \rrbracket$, also $x \leq x_n$. Die Umkehrung ist klar.
- 7) Offenbar sind die Äquivalenzklassen bezüglich ζ abgeschlossen; jede Klasse ist überdies zusammenhängend: Sei $[x]_{\zeta} = A \cup B$, A, B offen in $[x]_{\zeta}$. Annahme: $A \neq \emptyset$ und

$B \neq \emptyset$. Sei etwa $x \in A$, es gibt dann $y \in B$. Es gibt Punkte $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ so, daß x_i und x_{i+1} vergleichbar sind. Offensichtlich gilt $x_i \in [x]_{\xi}$ für jedes i . Sei $k = \max \{ i \mid \text{für } j \leq i \text{ gilt } x_j \in A \}$. Es können dann folgende Fälle eintreten:

a) $k = n$, dann ist $x_n = y \in A$, also $A \cap B \neq \emptyset$.

b) $k < n$, $x_k \in A$, $x_{k+1} \notin A$, somit $x_{k+1} \in B$. x_k und x_{k+1} sind vergleichbar:

Ist $x_k \leq x_{k+1}$, so folgt $x_{k+1} \in A$, da A offen in $[x]_{\xi}$, Widerspruch; ist $x_{k+1} \leq x_k$, so folgt $x_k \in B$, da B offen ist in $[x]_{\xi}$, somit $A \cap B \neq \emptyset$.

8) folgt unmittelbar aus 1) und 7).

9) ist trivial.

1.11. Corollar: Die Unterkategorie der durch die Identität geordneten Mengen ist epi-reflektiv in $\mathcal{Q}$.

Beweis: Wir benutzen 1.10.7. und rechnen in $\mathfrak{A}$. Die natürliche Abbildung $\nu : E \longrightarrow E/\xi$ ist stetig, wenn E/ξ mit der diskreten Topologie versehen wird, es ist $(E/\xi, \mathcal{P}(E/\xi)) \in |\mathfrak{A}|$. Sei $(F, =) \in |\mathcal{Q}|$ durch die Identität geordnet, dann gilt $T((F, =)) = (F, \mathcal{P}(F))$ nach 1.10.9. Sei $f : (E, \mathcal{Q}) \longrightarrow (F, \mathcal{P}(F))$ stetig, dann ist f auf jeder Zusammenhangskomponente von $(E, \mathcal{Q})$ konstant, woraus alles folgt.

1.12. Satz: 1) Sei $(E, \leq) \in |\mathfrak{S}|$. Dann existiert zu dem Funktor $M_{\mathfrak{S}}(E, .)$ ein linksadjungierter Funktor.
2) Sei $(F, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. Dann existiert zu dem Funktor $M_{\mathcal{Q}}(F, .)$ ein linksadjungierter Funktor.
Sowohl in $\mathfrak{S}$ als auch in $\mathcal{Q}$ existieren also Tensorprodukte.

Beweis: Das Problem wird durch den Funktor $. \times E$ bzw. $. \times F$ gelöst.

1.13. Lemma: In den Kategorien $\mathfrak{S}$ und $\mathcal{Q}$ existieren Coprodukte.

Beweis: Sie existieren offensichtlich in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$.

1.14. Satz: Jedes Objekt aus $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathcal{Q}$ ist bezüglich der Ein-

bettungen induktiver Limes der endlichen Unterräume. Wir nennen die Objekte aus $\mathcal{G}$ und $\mathcal{Q}$ daher endlich erzeugbar.

§ 2. Die MacNeillesche Vervollständigung

Da wir die MacNeillesche Konstruktion in späteren Paragraphen als Hilfsmittel benötigen, wollen wir hier die wichtigsten Eigenschaften zusammenstellen.

2.1. Def.: Seien $(E, \leq), (F, \prec) \in \mathcal{Q}$. Eine Abbildung $f: (E, \leq) \longrightarrow (F, \prec)$ heißt

- 1) sup-treu, wenn für jedes $A \subset E, A \neq \emptyset$, für das $\sup_E A$ existiert, auch $\sup_F f[A]$ existiert und $\sup_F f[A] = f(\sup_E A)$ gilt.
- 2) stark sup-treu, wenn für jedes $A \subset E$, für das $\sup_E A$ existiert, auch $\sup_F f[A]$ existiert und $\sup_F f[A] = f(\sup_E A)$ gilt.

Analog werden inf-treue und stark inf-treue Abbildungen definiert.

2.2. Def.: Sei $(E, \leq) \in \mathcal{Q}$. Für jedes $A \subset E$ bezeichne A^* die Menge der oberen Schranken von A in $(E, \leq)$, A^+ die Menge der unteren Schranken von A in $(E, \leq)$. $A \subset E$ heißt Schnitt, wenn $A = (A^*)^+$.

2.3. Lemma: Sei $(E, \leq) \in \mathcal{Q}$. Dann gilt:

- 1) Ist $A \subset E$ ein Schnitt, so gilt $A = A^-$ bezüglich der Rechtstopologie.
- 2) Für jedes $x \in E$ ist $\langle \leftarrow, x \rangle$ ein Schnitt.
- 3) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Schnitten, so ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ ein Schnitt.

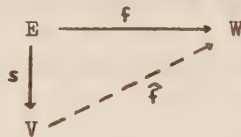
Sei nun $(E, \leq) \in \mathcal{Q}$. Es bezeichne $N(E)$ die Gesamtheit aller Schnitte in $(E, \leq)$; wird $N(E)$ mit der Inklusion als Ordnungsrelation versehen, so ist $(N(E), \subset)$ offenbar ein vollständiger Verband, wobei Infima wegen 2.3.3. mittels Durchschnittsbildung berechnet werden. $\mu_E: (E, \leq) \longrightarrow (N(E), \subset)$ sei definiert durch $\mu_E(x) = \langle \leftarrow, x \rangle$. Es ist leicht einzusehen, daß $\mu_E: (E, \leq) \longrightarrow (\mu_E[E], \subset)$ ein Ordnungsisomorphismus ist. Überdies ist $\mu_E: (E, \leq) \longrightarrow (N(E), \subset)$ stark sup-treu und stark inf-treu. Wir stellen noch heraus:

2.4. Satz: Sei $(E, \leq) \in \mathcal{U}$. $\mu_E: (E, \leq) \longrightarrow (N(E), \leq)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $(E, \leq)$ ein vollständiger Verband ist.

Wir betrachten nun die folgenden universellen Abbildungsprobleme:

Sei $(E, \leq) \in \mathcal{U}$. Gesucht sind ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ und eine $\begin{matrix} 1) \text{ monotone} \\ 2) \text{ stark sup-treue} \end{matrix}$ Abbildung

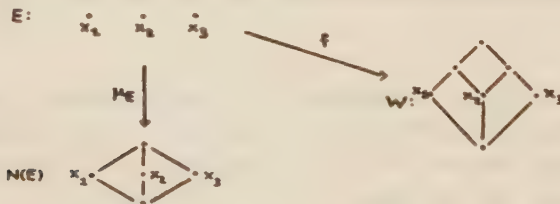
$s: (E, \leq) \longrightarrow (V, \leq)$ derart, daß zu jeder $\begin{matrix} 1) \text{ monotonen} \\ 2) \text{ stark sup-treuen} \end{matrix}$ Abbildung $f: (E, \leq) \longrightarrow (W, \leq)$ in einen vollständigen Verband $(W, \leq)$ genau eine stark sup-treue Abbildung



$\hat{f}: (V, \leq) \longrightarrow (W, \leq)$ mit $\hat{f} \circ s = f$ existiert.

Mit anderen Worten: Wir fragen, ob die Kategorie $\overline{\mathcal{V}}$ der vollständigen Verbände und stark sup-treuen Abbildungen reflektiv ist in der Kategorie $\mathcal{U}$ bzw. der Kategorie $\overline{\mathcal{U}}$ der geordneten Mengen und stark sup-treuen Abbildungen.

Wir weisen darauf hin, daß das erste der Probleme nicht durch die MacNeillesche Konstruktion gelöst, wie BOURBAKI [4] behauptet; wir illustrieren dies durch ein Beispiel:



Definieren wir $f(x_1) = x_1$, so ist f monoton. Es existiert aber keine stark sup-treue Abbildung $\hat{f}$, auch keine sup-treue, mit $\hat{f} \circ \mu_E = f$. Da dies f sogar stark sup-treu ist, zeigt das Beispiel, daß auch das zweite Problem nicht mit Hilfe der MacNeilleschen Vervollständigung gelöst werden kann. Wir kommen auf beide Fragestellungen in § 5 zurück.

§ 3. Wie sehen die Morphismen aus?

3.1. Def.: Wir verabreden folgende Bezeichnungen:

- 1) Die Kategorie $\mathcal{V}$: Objekte: Verbände
Morphismen: Verbandshomomorphismen
- 2) Die Kategorie $\mathcal{B}$: Objekte: Boolesche Algebren
Morphismen: Boolesche Homomorphismen
- 3) Die Kategorie $\mathcal{T}$: Objekte: total geordnete Mengen
Morphismen: monotone Abbildungen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Morphismen in den Kategorien $\mathcal{G}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{T}$ studieren. Zuvor stellen wir heraus

3.2. Satz: Die Kategorie $\mathcal{B}$ ist dual zur Kategorie $\mathcal{U}$ der total unzusammenhängenden kompakten topologischen Räume und stetigen Abbildungen.

3.3. Lemma: Sei $\mathcal{L}$ eine Kategorie, deren Objekte strukturierte Mengen und deren Morphismen strukturverträgliche Abbildungen sind. Liegen dann alle konstanten Abbildungen zwischen Objekten aus $\mathcal{L}$ in $M_{\mathcal{L}}$, so gilt:

$$u \in M_{\mathcal{L}} \text{ monomorph} \iff u \text{ injektiv.}$$

Zur Untersuchung der Kategorien $\mathcal{G}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{T}$ werden wir fortan die in § 1 definierten Funktoren ohne weiteren Hinweis benutzen.

3.4. Lemma: Sei $(V, \leq) \longrightarrow (W, <) \in M_{\mathcal{V}}$ monomorph. Dann ist $(V, \leq) \longrightarrow (f[V], <)$ ein Isomorphismus in der Kategorie $\mathcal{U}$, überdies ist $f[V]$ Unterverband von W .

Beweis: Wegen 3.3. ist f injektiv. $f^{-1}: (f[V], <) \longrightarrow (V, \leq)$ ist monoton: Sei nämlich $f(x) < f(y)$, $x, y \in V$, dann gilt $f(x) = f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y)$, mithin $x = x \wedge y \leq y$. $f[V]$ ist offenbar Unterverband von W .

3.5. Lemma: Sei $(E, \leq) \longrightarrow (F, <) \in M_{\mathcal{G}}$ (bzw. $M_{\mathcal{U}}$, $M_{\mathcal{T}}$). Dann gilt: f extremer Monomorphismus $\implies f$ isotone Einbettung. Im Fall $f \in M_{\mathcal{V}}$ ist $(E, \leq)$ bis auf Isomorphie Unterverband von $(F, <)$.

Beweis: Sei f extrem-mono; wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (E, \leq) & \xrightarrow{f} & (F, \leq) \\ & \searrow f' \quad \swarrow i & \\ & (f[E], \leq) & \end{array}$$

wobei f' durch f definiert ist. Offenbar ist f' epimorph, also Isomorphismus. Im Fall $f \in M_{\infty}$ ist $(f[E], \leq)$ Unterverband von $(F, \leq)$.

3.6. Lemma: In den Kategorien $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}, \omega$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{T}$ existieren stets Kerne.

Beweis: Seien $(E, \leq) \longrightarrow (F, \leq), (E, \leq) \longrightarrow (F, \leq) \in M_{\mathcal{G}}$. Wir definieren $K = \{x \mid x \in E, f(x) = g(x)\}$. K werde mit der induzierten Halbordnung versehen, $(K, \leq) \in |\mathcal{G}|$. Offenbar ist dann die Einbettung $i: (K, \leq) \longrightarrow (E, \leq)$ Kern.

In den Kategorien $\mathcal{G}, \omega$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{T}$ verläuft die Konstruktion analog.

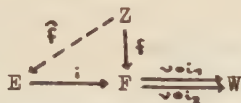
3.7. Lemma: Sei $(L, \mathcal{L}) \in |\text{Top}|$; für $x, y \in L$ gelte stets $x \in \{y\}^-$ oder $y \in \{x\}^-$. Ist dann π eine Äquivalenzrelation auf L und $\nu: L \longrightarrow L/\pi$ die natürliche Abbildung, so besitzt der Quotientenraum $(L/\pi, \mathcal{L}_{\pi})$ dieselbe Eigenschaft.

Beweis: Seien $[x]_{\pi}, [y]_{\pi} \in L/\pi$, es gelte etwa $x \in \{y\}^-$, dann ist $[x]_{\pi} = \nu(x) \in \nu[\{y\}^-] \subset \{\nu(y)\}^- = \{[y]_{\pi}\}^-$.

3.8. Lemma: In den Kategorien $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}, \omega$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{T}$ gilt: Ist f ein extremer Monomorphismus, so ist f Kern.

Beweis: 1) Sei $(E, \leq) \xrightarrow{i} (F, \leq) \in M_{\mathcal{G}}$ extrem-monomorph. Wegen 3.5. dürfen wir annehmen, daß i Einbettung ist, $E \subset F$. Sei $Y = F \times \{1, 2\}$ mit der Summentopologie versehen. Der Quotientenraum $W = Y/E$ entstehe dadurch, daß in Y Punkte $(a, 1)$ und $(a, 2)$ für $a \in E$ identifiziert werden. $\nu: Y \longrightarrow W$ bezeichne die natürliche Abbildung, $i_k: F \longrightarrow Y$ sei definiert durch $i_k(x) = (x, k)$, $k = 1, 2$. Wegen 1.3. gilt $W \in |\mathcal{G}|$, ferner ist $E = \{x \mid x \in F, \forall o i_1(x) = \nu o i_2(x)\}$, $\nu o i_k$ ist stetig. Ist $f: Z \longrightarrow F$ stetig und $(\nu o i_1) \circ f = (\nu o i_2) \circ f$, so existiert offenbar ein stetiges $\hat{f}: Z \longrightarrow E$ mit $i o \hat{f} = f$, denn E trägt

initiale Topologie bezüglich i .



2) Im Fall $i \in M_{\mathcal{C}}$ müssen wir nachweisen, daß $W \in |\mathcal{C}|$. Wir zeigen, daß W ein T_0 -Raum ist.

- I) Sei $x \in F - E$; $\nu((x,1))$ und $\nu((x,2))$ können in W getrennt werden: Sei $U = [x, \rightarrow[$; dann ist die Teilmenge $V = (U \times \{1\}) \cup \{(t,2) \mid \text{es gibt } a \in U \cap E \text{ mit } a \leq t\} \subset Y$ offen und saturiert, und es gilt $\nu((x,1)) \in \nu[V], \nu((x,2)) \notin \nu[V]$ wegen $x \notin E$.
- II) Seien $x, y \in F - E$, $x \neq y$, etwa $x \notin y$. $\nu((x,1))$ und $\nu((y,2))$ können in W getrennt werden: Sei V wie in I) definiert, dann gilt $\nu((x,1)) \in \nu[V], \nu((y,2)) \notin \nu[V]$, denn sonst gäbe es $a \in U \cap E$ mit $x \leq a \leq y$.
- III) Seien $x \in F - E$, $a \in E$; $\nu((x,1))$ und $\nu((a,1))$ können getrennt werden:
- (i) Im Fall $x < a$ sei $L = [a, \rightarrow[$, $N = (L \times \{1\}) \cup (L \times \{2\})$ ist saturiert und offen in Y , $\nu((a,1)) \in \nu[N]$, $\nu((x,1)) \notin \nu[N]$ wegen $x < a$.
 - (ii) Sei $x \not\leq a$, $U = [x, \rightarrow[$, ferner sei $B = \{(t,2) \mid \text{es gibt } b \in U \cap E \text{ mit } b \leq t\}$. $M = (U \times \{1\}) \cup B \subset Y$ ist offen und saturiert, es gilt $\nu((x,1)) \in \nu[M]$, jedoch $\nu((a,1)) = \nu((a,2)) \notin \nu[M]$, denn offenbar ist $\nu((a,1)) \notin \nu[U \times \{1\}]$, da sonst $a \in U$, und ebenso $\nu((a,1)) \notin \nu[B]$, da sonst $b \in U \cap E$ mit $x \leq b \leq a$ existiert.
- IV) Seien $a, b \in E$, $a \neq b$, etwa $a \not\leq b$. Wir trennen $\nu((a,1))$ und $\nu((b,1))$: Sei L wie in III), N ebenso, dann ist $\nu((a,1)) \in \nu[N], \nu((b,1)) \notin \nu[N]$, da $b \notin L$.

3) Sei $i \in M_{\mathcal{D}}$. Wir zeigen verschärft: $i \text{ monomorph} \Rightarrow i \text{ Kern.}$ Wir ändern die in 1) gegebene Konstruktion dadurch ab, daß wir $\mu_W: W \rightarrow N(W)$ (s. § 2) mit den $\nu \circ i_k$ komponieren. Wir zeigen: $\mu_W \circ \nu \circ i_k \in M_{\mathcal{D}}$, $k = 1, 2$. Der Rest verläuft dann analog.

Wir wissen bereits, daß wir E als Unterverband von F ansehen können. Seien $x, y \in F$, dann ist $\nu \circ i_1(x \vee y)$ obere Schranke von $\nu \circ i_1(x)$ und $\nu \circ i_1(y)$. Sei $\xi \in W$ obere Schranke von $\nu \circ i_1(x)$

und $\forall \circ i_1(y)$.

I) $\xi = \forall \circ i_1(z)$, dann gilt

$$i_1(x), i_1(y) \in \bigcup_{a \in E \cap \{z\}} \{ \leftarrow, i_1(a) \} , \text{ also}$$

$$i_1(x) \leq i_1(z), i_1(y) \leq i_1(z), x \leq z, y \leq z, x \vee y \leq z, \text{ daher} \\ \forall \circ i_1(x \vee y) \leq \forall \circ i_1(z) = \xi .$$

II) $\xi = \forall \circ i_2(z)$, dann gilt

$$i_1(x), i_1(y) \in \bigcup_{a \in E \cap \{z\}} \{ \leftarrow, i_1(a) \} , \text{ es gibt}$$

$$a, b \in E \text{ mit } a \leq z, b \leq z, i_1(x) \leq i_1(a), i_1(y) \leq i_1(b), \text{ also} \\ x \leq a \leq z, y \leq b \leq z, a \vee b \in E, a \vee b \leq z, x \vee y \leq a \vee b, \text{ somit} \\ \forall \circ i_1(x \vee y) \leq \forall \circ i_1(a \vee b) = \forall \circ i_2(a \vee b) \leq \forall \circ i_2(z) = \xi .$$

Für das Infimum verlaufen die Betrachtungen analog. Da μ_W stark sup-treu und stark inf-treu ist, ist alles gezeigt.

4) Sei $i \in M_{\mathcal{U}}$. Wir zeigen verschärft: i monomorph $\Rightarrow i$ Kern.

$i[E]$ ist quasikompakt, mithin abgeschlossen, da (F, δ)

T_2 -Raum ist, $i: (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (F, \delta)$. Wir verwenden die Kon-

struktion aus 1) und bemerken, daß $W = Y/i[E]$ T_2 -Raum ist;

als Quotient eines kompakten Raumes ist W quasikompakt, daher

kompakt. Daß W auch total unzusammenhängend ist, ergibt sich

unmittelbar daraus, daß in einem kompakten Raum W für die Zu-

sammenhangskomponente K_w eines Punktes $w \in W$ gilt $K_w = \bigcap_{T \in \mathcal{T} \cap T^*} T$

Dies zeigt $W \in \mathcal{U}$. Sei $(Z, \mathcal{Z}) \xrightarrow{f} (F, \delta) \in M_{\mathcal{U}}$ mit

$(\forall \circ i_1) \circ f = (\forall \circ i_2) \circ f$. Dies bedeutet $f[Z] \subset i[E]$; mengen-

theoretisch existiert also genau eine Abbildung $\hat{f}: Z \longrightarrow E$

mit $i \circ \hat{f} = f$. Wir zeigen, daß $\hat{f}$ stetig ist und bemerken zu-

nächst, daß i abgeschlossen ist. Sei nun $A = A^- \subset E$; es ist

$i[A] = i[A]^-$, daher $f^{-1}[i[A]] = f^{-1}[i[A]]^-$, da f stetig. Da

i injektiv ist, gilt $\hat{f}^{-1}[A] = f^{-1}[i[A]]$, womit alles gezeigt

ist.

5) Sei $i \in M_{\mathcal{U}}$. Wir dürfen wieder $E \subset F$ annehmen. Zunächst

definieren wir auf $F \times \{1, 2\}$ eine Relation $\subset$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Es gelte} \quad & \left. \begin{aligned} (x, 1) \subset (y, 1) \\ (x, 2) \subset (y, 2) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x < y \text{ in } F \\ & \left. \begin{aligned} (x, 1) \subset (y, 2) \\ (x, 2) \subset (y, 1) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x < y \text{ in } F, x \neq y \end{aligned}$$

Ferner sei $(x, 1) \subset (x, 2)$ für jedes $x \in F$. Offenbar ist $\subset$ eine

Ordnungsrelation, überdies $Y = F \times \{1, 2\} \in \mathcal{U}$; $i_k: F \longrightarrow Y$

ist monoton, $k = 1, 2$. Wir bilden nun mengentheoretisch den

Quotienten $W = Y/E$ wie in 1) und überlegen, daß wegen 3.7. durch $\sqsubset$ auf W eine totale Ordnung induziert wird, $\nu: Y \longrightarrow W$ ist monoton. Alles weitere verläuft analog zu 1).

3.9. Lemma: In den Kategorien $\mathfrak{S}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{W}, \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{T}$ gilt:
 f Epimorphismus $\iff f$ surjektiv.

Beweis: Sei $f: E \longrightarrow F$ epimorph, $i: f[E] \longrightarrow F$ sei die Einbettung, $\hat{f}: E \longrightarrow f[E]$ definiert durch $i \circ \hat{f} = f$.

In den Fällen $\mathfrak{S}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{T}$ betrachten wir

$$E \xrightarrow{\hat{f}} f[E] \xrightarrow{i} F \xrightarrow[\nu \circ \nu \circ \nu]{\mu \circ \mu \circ \mu} W$$

analog zu den Beweisen von 3.8., $W = F \times \{1,2\}/f[E]$. Es ist

$$\nu \circ i_1 \circ i = \nu \circ i_2 \circ i, \text{ also } \nu \circ i_1 \circ i \circ \hat{f} = \nu \circ i_2 \circ i \circ \hat{f},$$

$\nu \circ i_1 \circ f = \nu \circ i_2 \circ f$, f ist epimorph, mithin $\nu \circ i_1 = \nu \circ i_2$, und dies zeigt $f[E] = F$.

Im Fall $\mathfrak{W}$ betrachten wir

$$E \xrightarrow{\hat{f}} f[E] \xrightarrow{i} F \xrightarrow[\mu \circ \nu \circ \nu \circ \nu]{\mu \circ \nu \circ \nu \circ \nu} N(W),$$

der Rest verläuft analog.

3.10. Def.: Sei $(X, \leq) \in |\mathfrak{Q}|$. Eine Äquivalenzrelation R auf X heißt $\mathfrak{Q}$ -Äquivalenzrelation ($\mathfrak{Q}$ -ÄR), wenn die Quotiententopologie von X/R bezüglich der Rechtstopologie von $(X, \leq)$ eine T_0 -Topologie ist, wenn also $X/R \in |\mathfrak{Q}_0|$.

3.11. Def.: Seien X, Y Mengen, $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Sei $R_f = \{(x,y) \mid (x,y) \in X \times X, f(x) = f(y)\}$.

3.12. Lemma: Sei $(X, \leq) \longrightarrow (Y, <) \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{Q}}$. Dann ist R_f eine $\mathfrak{Q}$ -ÄR.

Beweis: Seien $[x], [y] \in X/R_f$; $[x] \neq [y]$ bedeutet $f(x) \neq f(y)$. Es gibt etwa $U \in \mathfrak{W}_x$, $U \subset Y$, mit $f(x) \in U$, $f(y) \notin U$. Sei $V = f^{-1}[U]$, $V \in \mathfrak{W}_x$.

1) $[x] \in \nu[V]$ ist evident; wäre $[y] \in \nu[V]$, so gäbe es $t \in V$ mit $[y] = [t]$, $f(y) = f(t) \in f[V] \subset U$.

2) V ist saturiert: Sei $w \in \nu^{-1}[\nu[V]]$, so gilt $[w] = [t]$ mit $t \in V$, also $f(w) = f(t) \in f[V] \subset U$, $w \in f^{-1}[U] = V$.

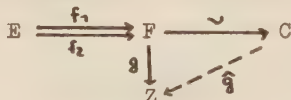
3.13. Lemma: Sei $(X, \leq) \in |\mathfrak{Q}|$, $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ sei eine Familie von $\mathfrak{Q}$ -ÄR auf X . Dann ist $R = \bigcap_{\alpha \in I} R_\alpha$ eine $\mathfrak{Q}$ -ÄR.

Beweis: Sei $\nu_\alpha: X \longrightarrow X/R_\alpha$ die natürliche Abbildung, $\alpha \in I$.
 $v: X \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ sei definiert durch $v(x) = (\nu_\alpha(x))_{\alpha \in I}$.
 Offenbar ist v monoton, also ist R_v eine $\mathcal{U}$ -ÄR, und man
 sieht leicht $R_v = R$; hierbei ist $X_\alpha = X/R_\alpha$.

3.14. Lemma: Seien $(E, \leq) \xrightarrow{f_1} (F, <), (E, \leq) \xrightarrow{f_2} (F, <) \in M_{\mathcal{U}}$
 (bzw. $M_{\mathcal{U}}, M_{\mathcal{C}}$). Dann existiert $\text{Cokern}(f_1, f_2)$.

Beweis: Seien $f_1, f_2 \in M_{\mathcal{U}}$, sei $R_1 = \{(f_1(x), f_2(x)) \mid x \in E\}$,
 $R = \bigcap_{\substack{S \text{ Äquivalenzrelation} \\ \text{auf } F \text{ mit } F \supset R_1}} S$. $C = F/R$ sei mit Quotiententopologie versehen.

Wegen 1.3. wissen wir, daß $C \in |\mathcal{U}|$. Ist $(F, <) \xrightarrow{g} (Z, \sqsubset) \in M_{\mathcal{U}}$
 mit $g \circ f_1 = g \circ f_2$, so bedeutet dies $R \subset R_g$, also existiert
 genau eine Abbildung



$\hat{g}$ mit $\hat{g} \circ \nu = g$, und $\hat{g}$ ist stetig, da C Quotiententopologie
 trägt. Dies zeigt $\nu = \text{Cokern}(f_1, f_2)$.

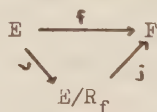
Im Fall $f_1, f_2 \in M_{\mathcal{U}}$ wählen wir $R = \bigcap_{\substack{S \mathcal{U}\text{-ÄR} \\ \text{auf } F \text{ mit } S \supset R_1}} S$; beispielsweise

ist $F \times F$ eine solche $\mathcal{U}$ -ÄR, die bei der Durchschnittsbildung
 vorkommt. Alles weitere verläuft analog, da R_g $\mathcal{U}$ -ÄR ist.
 Im Fall $f_1, f_2 \in M_{\mathcal{C}}$ beachten wir zusätzlich 3.7.

3.15. Def.: Seien $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y}) \in |\text{Top}|$. $f \in C(X, Y)$ heißt iden-
 tifizierend, wenn f surjektiv ist und $\mathcal{Y}$ die finale Topologie
 bezüglich f ist.

3.16. Lemma: Sei $(E, \leq) \xrightarrow{f} (F, <) \in M_{\mathcal{U}}$ (bzw. $M_{\mathcal{U}}, M_{\mathcal{C}}$). Dann
 gilt: f extremer Epimorphismus $\implies f$ identifizierend.

Beweis: Sei f extrem-epimorph. Wir betrachten das Diagramm



Hierbei ist j monomorph, also Isomorphismus. Wir beachten in
 diesem Zusammenhang 3.7. und 3.12.

3.17. Lemma: Sei $(E, \leq) \xrightarrow{f} (F, \leq) \in M_{\mathfrak{g}}$ (bzw. $M_{\mathfrak{g}}$, $M_{\mathfrak{c}}$) extremer Epimorphismus. Dann ist f Cokern.

Beweis: Sei $f \in M_{\mathfrak{g}}$. Wir versehen R_f mit der Relativtopologie $\mathfrak{Q}$ der Produkttopologie und beachten $(R_f, \mathfrak{Q}) \in |\mathfrak{D}|$; es gilt $f = \text{Cokern}(R_f \xrightarrow[p_2]{p_1} E)$:

$$\begin{array}{ccccc} R_f & \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} & E & \xrightarrow{f} & F \cong E/R_f \\ & & \downarrow g & \nearrow \hat{g} & \\ & & Z & & \end{array}$$

Sei $g \in M_{\mathfrak{g}}$ mit $g \circ p_1 = g \circ p_2$, dann folgt $R_f \subset R_g$, es existiert genau ein stetiges $\hat{g}: F \rightarrow Z$ mit $g \circ f = \hat{g}$, da f identifizierend ist.

Im Fall $f \in M_{\mathfrak{g}}$ verläuft alles analog; wir beachten lediglich $(R_f, \mathfrak{Q}) \in |\mathfrak{D}_1|$.

Im Fall $f \in M_{\mathfrak{c}}$ definieren wir zunächst auf $E \times E$ eine Relation $\sqsubset$ wie folgt:

$$\begin{aligned} (x, z) \sqsubset (y, z) &\iff x \leq y \text{ in } E \\ (x, t) \sqsubset (y, z) &\iff x \neq y, x \leq y \text{ in } E \\ (x, z) \sqsubset (x, t) &\iff z \leq t \text{ in } E \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $\sqsubset$ eine totale Ordnung auf E^2 definiert; R_f werde mit der induzierten Struktur versehen. Da die Projektionen $p_k: R_f \rightarrow E$, $k = 1, 2$, monoton sind, können nun die obigen Überlegungen benutzt werden.

Den weiteren Betrachtungen schicken wir voraus

3.18. Lemma: Sei $(X, \mathfrak{X}) \xrightarrow{u} (Y, \mathfrak{Y}) \in M_{\text{Top}}$ surjektiv, $(X, \mathfrak{X})$ sei quasikompakt, $(Y, \mathfrak{Y})$ sei T_2 -Raum. Dann ist u abgeschlossen, und $\mathfrak{Y}$ ist die Identifizierungstopologie bezüglich u .

3.19. Lemma: Sei $u \in M_{\mathfrak{u}}$ epimorph, dann ist u Cokern.

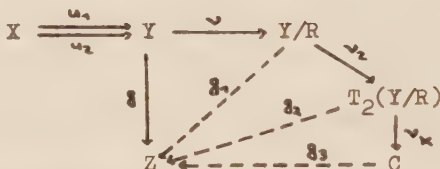
Beweis: Sei $u: (X, \mathfrak{X}) \rightarrow (Y, \mathfrak{Y})$ epimorph. Wegen 3.18. ist u identifizierend. $R_u \subset X \times X$ ist offenbar total unzusammenhängend und kompakt, da abgeschlossen, bezüglich der Relativtopologie $\mathfrak{Q}$ der Produkttopologie, also $(R_u, \mathfrak{Q}) \in |\mathfrak{U}|$. Alles weitere verläuft wie in 3.17.

3.20. Lemma: Seien $(X, \mathfrak{X}) \xrightarrow{u_1} (Y, \mathfrak{Y}), (X, \mathfrak{X}) \xrightarrow{u_2} (Y, \mathfrak{Y}) \in M_{\mathfrak{u}}$,

dann existiert $\text{Cokern}(u_1, u_2)$.

Beweis: Sei $R_1 = \{(u_1(x), u_2(x)) \mid x \in X\}$, $R = \bigcap S$
 S Äquivalenzrelation auf Y mit $S \supset R_1$

Y/R trage Quotiententopologie. Wir gehen über zur T_2 -Reflexion $T_2(Y/R)$ und bemerken, daß die T_2 -Reflexion eines topologischen Raumes stets ein Quotient desselben ist; mithin ist $T_2(Y/R)$ kompakt. Sei $C = K(T_2(Y/R))$ der Komponentenraum von $T_2(Y/R)$, dann gilt $C \in \mathcal{M}$.



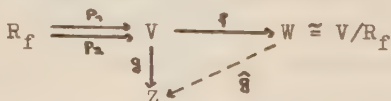
Sei nun $(Y, \gamma) \xrightarrow{g} (Z, \beta) \in \mathcal{M}_K$ mit $g \circ u_1 = g \circ u_2$, so gilt $R \subset R_g$, es existiert ein stetiges g_1 mit $g_1 \circ v = g$; da (Z, β) T_2 -Raum ist, existiert ein stetiges g_2 mit $g_2 \circ v_2 = g_1$, und da (Z, β) total unzusammenhängend ist, existiert ein stetiges g_3 mit $g_3 \circ v_K = g_2$, also $g = g_3 \circ (v_K \circ v_2 \circ v)$. g_3 ist offenbar eindeutig bestimmt.

3.21. Lemma: Sei $(V, \leq) \xrightarrow{f} (W, <) \in \mathcal{M}_\mathcal{O}$ epimorph. Dann ist f identifizierend.

Beweis: Sei $U \subset W$ derart, daß $f^{-1}[U]$ offen ist. Sei $x \in U$, $y \in W$, $x < y$, also $y = x \vee y$. f ist wegen 3.9. surjektiv, es gibt $a \in f^{-1}[U]$, $b \in V$ mit $f(a) = x$, $f(b) = y$. Dies zeigt $y = x \vee y = f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$, wobei $a \vee b \in f^{-1}[U]$, da $f^{-1}[U]$ offen ist. Somit ist $y \in f[f^{-1}[U]] = U$, U ist offen.

3.22. Lemma: Sei $f \in \mathcal{M}_\mathcal{O}$ epimorph, dann ist f Cokern.

Beweis: Sei $f: (V, \leq) \rightarrow (W, <) \in \mathcal{M}_\mathcal{O}$ epimorph; $R_f \subset V \times V$ trage



die vom Produkt induzierte Struktur. R_f ist offensichtlich ein Unterverband, und die Projektionen $p_k: R_f \rightarrow V$, $k = 1, 2$,

liegen in $M_{\mathcal{V}}$. Ist $g \in M_{\mathcal{V}}$ mit $g \circ p_1 = g \circ p_2$, so sehen wir, daß genau ein stetiges $\hat{g}$ mit $\hat{g} \circ f = g$ existiert. Offenbar gilt $\hat{g} \in M_{\mathcal{V}}$.

3.23. Lemma: Sei $(V, \leq) \xrightarrow{f} (W, <) \in M_{\mathcal{V}}$; wird dann V/R_f mit der Quotiententopologie versehen, so gilt bezüglich dieser $V/R_f \in |\mathcal{V}|$, und für die natürliche Abbildung $\nu: V \longrightarrow V/R_f$ gilt $\nu \in M_{\mathcal{V}}$, überdies $V/R_f \xrightarrow{j} W \in M_{\mathcal{V}}$, wenn $j \circ \nu = f$.

Beweis: Zunächst ist ν monoton und $V/R_f \in |\mathcal{V}|$, da R_f eine $\mathcal{V}$ -ÄR ist.

Seien $x, y \in V$; aus $f(x) < f(y)$ folgt $[x] \subseteq [y]$: Wir müssen hierfür $[x] \in \{[y]\}^-$ nachweisen. Sei $U \in \mathcal{U}([x])$, dann ist $\nu^{-1}[U] \in \mathcal{U}(x)$ saturiert. Wir betrachten $x \vee y \in V$; da $\nu^{-1}[U]$ offen ist, gilt $x \vee y \in \nu^{-1}[U]$. Es ist $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(y)$, mithin $[x \vee y] = [y]$, also $y \in \nu^{-1}[U]$, da $\nu^{-1}[U]$ saturiert ist. Dies zeigt $[y] \in U$.

Seien $[x], [y] \in V/R_f$; da ν monoton ist, ist $[x \vee y]$ obere Schranke von $\{[x], [y]\}$. Sei $[z] \in V/R_f$ obere Schranke von $\{[x], [y]\}$; j ist monoton, also $f(x) < f(z)$, $f(y) < f(z)$, daher $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) < f(z)$. Wie oben gezeigt, folgt daraus $[x \vee y] \subseteq [z]$. Dies zeigt $[x \vee y] = [x] \vee [y]$.

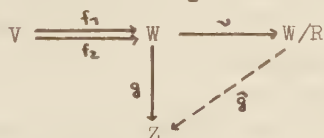
Analog gilt dies für Infima. Damit ist $V/R_f \in |\mathcal{V}|$ und $\nu \in M_{\mathcal{V}}$ gezeigt, und $j \in M_{\mathcal{V}}$, $j([x]) = f(x)$, ist ebenfalls evident.

3.24. Lemma: Seien $(V, \leq) \xrightarrow{f_1} (W, <), (V, \leq) \xrightarrow{f_2} (W, <) \in M_{\mathcal{V}}$, dann existiert $\text{Cokern}(f_1, f_2)$.

Beweis: Sei $R_1 = \{(f_1(x), f_2(x)) \mid x \in V\}$, ferner definieren wir $\mathcal{R} = \{S \mid S \text{ ÄR auf } W, S \supset R_1, W/S \text{ Verband, } W \xrightarrow{\nu_S} W/S \in M_{\mathcal{V}}\}$.

Sei $R = \bigcap_{S \in \mathcal{R}} S$, $\nu: W \longrightarrow \prod_{S \in \mathcal{R}} W/S$ sei definiert durch

$\nu(x) = (\nu_S(x))_{S \in \mathcal{R}}$. Offenbar gilt $\nu \in M_{\mathcal{V}}$, und gemäß 3.23. ist $W/R \in |\mathcal{V}|$, $W \xrightarrow{\nu} W/R \in M_{\mathcal{V}}$, denn $R = R_{\nu}$.



Ist $g \in M_{\mathcal{V}}$ mit $g \circ f_1 = g \circ f_2$, so sehen wir $R \subseteq R_g$, es gibt

genau eine Abbildung $\hat{g}$ mit $\hat{g} \circ \nu = g$. Es ist evident, daß $\hat{g} \in M_{\mathfrak{V}}$.

Wir fassen nun die bisherigen Ergebnisse zusammen:

3.25. Satz: In den Kategorien $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}$ (und damit auch in $\mathfrak{L}$) und $\mathfrak{C}$ existieren stets Kerne und Cokerne. Für die Morphismen in $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{C}$ gilt folgende Übersicht:

	Monomorphismen Epimorphismen	extreme Mono Epi	spezielle Mono Epi	Kerne Cokerne
$\mathfrak{Y}$	injektiv surjektiv	← isotone Einbettung → ← Quotientenabbildung →		
$\mathfrak{G}$	injektiv surjektiv	← isotone Einbettung → ← Quotientenabbildung →		
$\mathfrak{V}$	← injektiv = Einbettung von Unterverbänden → ← surjektiv = identifizierender Verbandshomomorphismus →			
$\mathfrak{L}$	← injektiv → ← surjektiv →			
$\mathfrak{C}$	injektiv surjektiv	← isotone Einbettung → ← Quotientenabbildung →		

Beweis: Es bleibt nur noch zu überlegen, wie sich die Verhältnisse in der Kategorie $\mathfrak{U}$ mittels Dualität in der Kategorie $\mathfrak{L}$ widerspiegeln. Nun ist aber bekannt (Darstellungstheorem von Stone, s. [9]), daß durch die in 3.2. erwähnte Dualität surjektive Abbildungen aus $\mathfrak{U}$ in injektive Abbildungen aus $\mathfrak{L}$ überführt werden.

3.26. Corollar: In den Kategorien $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$ (und damit auch in $\mathfrak{L}$) existieren beliebige projektive und induktive Limites.

3.27. Beispiele: Wir geben nun einige Beispiele von extremen Epimorphismen, die wir in § 4 verwenden werden.

- 1) Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$, $\mathcal{T}(E) = \{T \mid T \subset E \text{ endliche Kette, } T \neq \emptyset\}$ werde mit der Inklusion versehen. Wir definieren $f: (\mathcal{T}(E), \subset) \longrightarrow (E, \leq)$ durch $f(T) = \sup_E T$. f ist offensichtlich monoton, überdies surjektiv, da $\{x\} \in \mathcal{T}(E)$ für jedes $x \in E$. f ist identifizierend: Sei $H \subset E$ derart, daß $f^{-1}[H]$ offen ist. Dann ist H offen: Ist $x \in H$, $y \in E$, $x \leq y$, so ist $\{x\} \in f^{-1}[H]$, $\{x, y\} \in \mathcal{T}(E)$, also $\{x, y\} \in f^{-1}[H]$, und dies zeigt $y = f(\{x, y\}) \in f[f^{-1}[H]] = H$.
Wir bemerken, daß $(\mathcal{T}(E), \subset)$ längenendlich nach unten, insbesondere also atomar, ist.
- 2) Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$, $\mathcal{C}\mathcal{T}(E) = \{E - T \mid T \in \mathcal{T}(E)\}$. Wir definieren $g: (\mathcal{C}\mathcal{T}(E), \subset) \longrightarrow (E, \leq)$ durch $g(E - T) = \inf_E T$. Völlig dual zu 1) zeigt man, daß g extremer Epimorphismus ist. $(\mathcal{C}\mathcal{T}(E), \subset)$ ist längenendlich nach oben.
- 3) Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ längenendlich nach oben und unten. Sei $S = \{x \mid x \in E \text{ maximales Element}\}$. S ist konfinal in $(E, \leq)$; für jedes $x \in S$ sei $K_x = \{K \mid K \subset E \text{ maximale Kette, } x \in K\}$. Jedes $K \in K_x$ ist endlich. $\hat{E} = \sum_{\substack{K \in K_x \\ x \in S}} K \times \{x\}$ trage die Summentopologie bezüglich der Ketten K , die zugehörige Ordnungsrelation sei mit $\prec$ bezeichnet. $h: (\hat{E}, \prec) \longrightarrow (E, \leq)$ sei definiert durch $h((t, x)) = t$, $(t, x) \in K \times \{x\} \subset \hat{E}$. h ist offenbar monoton und surjektiv. h ist auch identifizierend: Sei $H \subset E$ so, daß $h^{-1}[H]$ offen ist in $\hat{E}$, sei $t \in H$, $u \in E$, $t \leq u$. Es gibt $x \in S$ mit $t \leq u \leq x$ und ein $K \in K_x$ mit $\{t, u\} \subset K$. Da $h^{-1}[H]$ offen ist und $(t, x) \in h^{-1}[H]$, folgt $(u, x) \in h^{-1}[H]$, also $u \in H$.
- 4) Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ Summe endlicher Ketten, $E = \sum_{i \in I} K_i$. Für jede Kette K_i mit $\text{Card } K_i \geq 2$ betrachten wir das System $\mathcal{Q}_i = \{L \mid K_i \supset L \text{ Kette, Card } L = 2\}$.
Sei $\hat{E} = \sum_{\substack{L \in \mathcal{Q}_i \\ \text{Card } K_i \geq 2}} L \times \{i\} + \sum_{\text{Card } K_i = 1} K_i \times \{i\}$ versehen mit der zur Summentopologie gehörenden Ordnungsrelation $\sqsubset$. Wir definieren $s: (\hat{E}, \sqsubset) \longrightarrow (E, \leq)$ durch $s((x, i)) = x$. s ist ersichtlich monoton und surjektiv, und analog zu 3) zeigt man leicht, daß s identifizierend ist.

3.28. Beispiele: Als Beispiele extremer Monomorphismen nennen wir die folgenden:

1) Sei $(E, <) \in |\mathcal{G}|$, dann ist die Einbettung

$\mu_E: (E, <) \longrightarrow (N(E), <) \text{ in die MacNeillesche Vervollständigung ein extremer Monomorphismus.}$

2) Sei $(E, <) \in |\mathcal{G}|$. Wir bezeichnen mit $\underline{\leq}$ die mit der natürlichen Ordnung versehene Kette $\{0, 1\}$ und definieren

$\lambda_E: E \longrightarrow \underline{\leq}^E$ wie folgt:

$$p_y(\lambda_E(x)) = \begin{cases} 1, & x \not\leq y \\ 0, & x \leq y \end{cases} \quad y \in E$$

Man sieht leicht, daß λ_E monoton und injektiv ist, überdies ist $\lambda_E^{-1}: \lambda_E[E] \longrightarrow E$ monoton, somit ist λ_E extrem-monomorph.

Wir erschließen hieraus

3.29. Corollar: Das Objekt $\underline{\leq}$ ist Cogenerator in $\mathcal{G}$.

In diesem Zusammenhang bemerken wir

3.30. Lemma: $\mathcal{C}$ sei eine Kategorie, $\mathcal{A}$ eine reflektive Unterkategorie von $\mathcal{C}$, $C \in |\mathcal{C}|$. Der Reflexionsmorphimus $r_C: C \longrightarrow C_{\mathcal{A}}$ ist genau dann (extrem-)monomorph, wenn ein $A \in |\mathcal{A}|$ derart existiert, daß in $M_{\mathcal{C}}(C, A)$ ein (extremer) Monomorphismus liegt.

Als Anwendung erhalten wir unmittelbar

3.31. Satz: Jede reflektive Unterkategorie $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ mit $\underline{\leq} \in |\mathcal{A}|$ ist extrem-mono-reflektiv.

Wir wollen schließlich noch ein Beispiel dafür geben, daß es nicht in jeder Unterkategorie von $\mathcal{G}$ so befriedigend zugeht wie in 3.25. beschrieben. Wir betrachten die Kategorie $\overline{\mathcal{G}}$ (s. § 2) und folgendes Objekt $(E, <) \in |\overline{\mathcal{G}}|$:

Sei $E = \mathbb{N} \cup \{0, \omega_1, \omega_2\}$; die Relation $<$ sei folgende: $\mathbb{N} \cup \{0\}$ trage die zur natürlichen Ordnung inverse Ordnung, überdies gelte $\omega_1 < n, \omega_2 < n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, darüber hinaus mögen keine Relationen bestehen, insbesondere sind also die ω_i nicht vergleichbar. $f_1, f_2: E \longrightarrow E$ seien wie folgt definiert: $f_1 = 1_E$;

$f_2(0) = 0$, $f_2(\omega_1) = \omega_1$, $f_2(\omega_2) = \omega_2$, $f_2(n) = n+1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Man stellt unschwer fest, daß $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$. Falls ein Kern existierte, so müßte dieser die Einbettung i von $\{0, \omega_1, \omega_2\}$ in $(E, <)$ sein, wie man leicht überlegt. i ist aber nicht stark sup-treu.

§ 4. Injektive und projektive Objekte

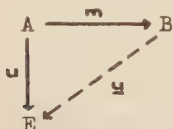
4.1. Def.: Ein Objekt $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ heißt

injektiv

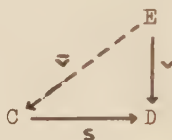
projektiv

wenn gilt:

Ist $A \xrightarrow{m} B \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ ein Monomorphismus, so existiert zu jedem Morphismus $u: A \longrightarrow E$ ein Morphismus $\underline{u}: B \longrightarrow E$ mit $u = \underline{u} \circ m$.



Ist $C \xrightarrow{s} D \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ ein Epimorphismus, so existiert zu jedem Morphismus $v: E \longrightarrow D$ ein Morphismus $\bar{v}: E \longrightarrow C$ mit $v = s \circ \bar{v}$.



4.2. Satz: 1) $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Card } E = 1$.

2) $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ ist genau dann projektiv, wenn $\leq$ die Identität ist.

Beweis: Offenbar sind die Bedingungen in 1) und 2) hinreichend.

Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ mit $\text{Card } E \geq 2$. Seien $x, y \in E$, $x \neq y$, beliebig gewählt; falls x, y vergleichbar sind, so sei $x < y$. Sei $A = \{a, b\}$ eine zweielementige diskret geordnete Menge. Wir definieren $h: A \longrightarrow E$ durch $h(a) = x$, $h(b) = y$; $g: A \longrightarrow \underline{2}$ sei definiert durch $g(a) = 1$, $g(b) = 0$. Offenbar gilt $g, h \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ und g ist monomorph. Falls $\underline{h}: \underline{2} \longrightarrow E$ mit $\underline{h} \circ g = h$ existiert, muß notwendig $\underline{h}(0) = y$, $\underline{h}(1) = x$ gelten. Ein monotones $\underline{h}$ müßte aber $\underline{h}(0) \leq \underline{h}(1)$ liefern. $(E, \leq)$ ist also nicht injektiv. Die Notwendigkeit der Bedingung 2) werden wir aus kategoriellen Betrachtungen erschließen.

4.3. Lemma: $\mathcal{L}$ sei eine Kategorie, $\mathcal{A}$ eine volle Unterkategorie.

- 1) Ist $\mathcal{A}$ epi-corefektiv in $\mathcal{L}$, so enthält $\mathcal{A}$ alle projektiven Objekte von $\mathcal{L}$.
- 2) Ist $\mathcal{A}$ mono-reflektiv in $\mathcal{L}$, so enthält $\mathcal{A}$ alle injektiven Objekte von $\mathcal{L}$.

Beweis: 1) Sei $P \in |\mathcal{L}|$ projektiv, $c: P_{\mathcal{A}} \longrightarrow P$ sei der Core-

flexionsmorphismus. Da P projektiv ist, existiert $t: P \longrightarrow P_\alpha$



mit $c \circ t = 1_P$, c ist also extremer Epimorphismus. Da c auch monomorph ist (jede Epi-Coreflexion ist Mono-Coreflexion, s. [10]), ist c Isomorphismus, womit alles gezeigt ist. Die Aussage 2) erhält man dual.

4.4. Lemma: In der Kategorie $\mathcal{G}$ ist

- 1) epi-corefektiv die Unterkategorie der durch die Identität geordneten Mengen,
- 2) epi-refektiv die Unterkategorie der einpunktigen geordneten Mengen.

Wir sehen, daß die Begriffe injektiv, projektiv in 4.1., wie sie auch bei FREYD und MITCHELL auftreten, in zu starker Anlehnung an die Algebra geprägt wurden. Dort fallen nämlich die Begriffe monomorph und extrem-monomorph sowie epimorph und extrem-epimorph zusammen, und in § 3 haben wir gesehen, daß in der Kategorie $\mathcal{G}$ Unterobjekte durch extreme Monomorphismen und Quotientenobjekte durch extreme Epimorphismen charakterisiert werden. Wir formulieren daher

4.5. Def.: Ein Objekt $(E, \leq) \in |\mathcal{G}|$ heißt

extrem-injektiv

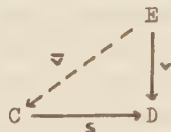
extrem-projektiv

wenn gilt:

Ist $A \xrightarrow{m} B \in M_{\mathcal{G}}$ ein extremer Monomorphismus, so gibt es zu jedem $A \xrightarrow{u} E \in M_{\mathcal{G}}$ ein $B \xrightarrow{u} E \in M_{\mathcal{G}}$ mit $u = u \circ m$.



Ist $C \xrightarrow{s} D \in M_{\mathcal{G}}$ ein extremer Epimorphismus, so gibt es zu jedem $E \xrightarrow{v} D \in M_{\mathcal{G}}$ ein $E \xrightarrow{\bar{v}} C \in M_{\mathcal{G}}$ mit $v = s \circ \bar{v}$.



4.6. Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) $(E, \leq) \in |\mathcal{G}|$ ist extrem-injektiv
- 2) $(E, \leq)$ ist vollständiger Verband

Beweis: Sei $(E, \leq)$ vollständiger Verband, $m: A \longrightarrow B$ sei extremer Monomorphismus in $\mathcal{G}$, $A \xrightarrow{u} E \in M_{\mathcal{G}}$. Wir betrachten $\mathcal{Y} = \{ (U, h) \mid m[A] \subset U \subset B, U \xrightarrow{h} E \in M_{\mathcal{G}} \text{ mit } h \circ m = u \}$.

Offenbar ist $\mathcal{Y}$ in naheliegender Weise induktiv geordnet; es gilt $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ wegen $(m[A], u \circ m^{-1}) \in \mathcal{Y}$, an dieser Stelle benötigen wir, daß m extrem-monomorph ist. Sei (U_0, h_0) maximal, wir zeigen: $U_0 = B$.

Annahme: Es gibt $b \in B - U_0$. Sei $U_1 = U_0 \cup \{b\}$, $\underline{x} = \sup_{c \leq b} h_0(c)$,

$\bar{x} = \inf_{b \leq d} h_0(d)$. Offenbar gilt $\underline{x} \leq \bar{x}$; wir wählen nun $y \in E$ mit

$\underline{x} \leq y \leq \bar{x}$ und definieren $h_1: U_1 \longrightarrow E$ durch $h_1|_{U_0} = h_0$, $h_1(b) = y$. Dann gilt $h_1 \circ m = u$, $h_1 \in M_{\mathcal{G}}$, und dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von (U_0, h_0) .

Sei umgekehrt $(E, \leq)$ extrem-injektiv. Wir betrachten den in § 2 definierten extremen Monomorphismus $\mu_E: E \longrightarrow N(E)$. Es existiert $s: N(E) \longrightarrow E$ mit $s \circ \mu_E = 1_E$. Offenbar besitzt $(E, \leq)$ ein kleinstes Element; sei $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $x_0 = \sup \mu_E[A]$; für jedes $a \in A$ ist dann $a = s \circ \mu_E(a) \leq s(x_0)$, und ist $b \in E$ eine obere Schranke von A , so ist $\mu_E(b)$ obere Schranke von $\mu_E[A]$, daher $x_0 \leq \mu_E(b)$, $s(x_0) \leq s \circ \mu_E(b) = b$. Dies zeigt $s(x_0) = \sup_E A$.

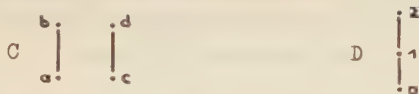
Um die extrem-projektiven Objekte von $\mathcal{G}$ zu charakterisieren, greifen wir zunächst auf die Beispiele 3.27. zurück. Sei $(E, \leq) \in \mathcal{G}$ extrem-projektiv. Dann existiert in nachstehendem Diagramm eine Liftung $\bar{f}$:



Als Coretraktion ist $\bar{f}$ ein extremer Monomorphismus, $(E, \leq)$ ist daher längenendlich nach unten. Völlig analog zeigt man durch Liftung von $g: (\mathcal{C}\mathcal{C}(E), \leq) \longrightarrow (E, \leq)$ gegen 1_E , daß $(E, \leq)$ längenendlich nach oben ist. Wird nun

$h: (\hat{E}, \leq) \longrightarrow (E, \leq)$ gegen 1_E geliftet, so sehen wir, daß $(E, \leq)$ Summe von endlichen Ketten ist. Durch Anwendung dieses Verfahrens auf $s: (\hat{E}, \leq) \longrightarrow (E, \leq)$ folgt schließlich, daß $(E, \leq)$ Summe von Ketten der Länge ≤ 2 ist. Wir überlegen nun, daß diese Ketten sogar einelementig sein müssen, und

benutzen folgende Hasse-Diagramme:



Wir definieren $t: C \longrightarrow D$ durch $f(a) = 0$, $f(b) = f(c) = 1$, $f(d) = 2$. Ferner sei $v: \underline{2} \longrightarrow D$ definiert durch $v(0) = 0$, $v(1) = 2$. t ist extremer Epimorphismus, aber v kann offenbar nicht gegen t geliftet werden.

4.7. Satz: $(E, \leq) \in |\mathcal{G}|$ ist genau dann extrem-projektiv, wenn $\leq$ die Identität ist.

Durch die Definition "extrem-projektiv" ist also die Gesamtheit der zur Konkurrenz zugelassenen Morphismen noch nicht so weit eingeschränkt, daß andere als die trivial geordneten Mengen projektiv werden. Um dieses Ziel doch noch zu erreichen, greifen wir nun auf topologische Hilfsmittel zurück.

4.8. Def.: Seien $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y}) \in |\text{Top}|$. $f \in C(X, Y)$ heißt zusammenhängend, wenn für jedes zusammenhängende $A \subset Y$ auch $f^{-1}[A]$ zusammenhängend ist.

4.9. Def.: Ein Objekt $(E, \leq) \in |\mathcal{G}|$ heißt epi-zusammenhängend-projektiv, wenn gilt:

Ist $C \xrightarrow{s} D \in \mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ ein zusammenhängender Epimorphismus, so existiert zu jedem $E \xrightarrow{v} D \in \mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ ein $E \xrightarrow{\bar{v}} C \in \mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ mit $v = s \circ \bar{v}$.

Wir wollen zunächst überlegen, daß nicht nur die trivial geordneten Mengen epi-zusammenhängend-projektiv sind.

4.10. Lemma: Das Objekt $\underline{2}$ ist epi-zusammenhängend-projektiv.

Beweis: Sei $C \xrightarrow{s} D \in \mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ zusammenhängender Epimorphismus, $\underline{2} \xrightarrow{v} D \in \mathcal{M}_{\mathcal{G}}$. $S = \{v(0), v(1)\}$ ist zusammenhängend, also auch $s^{-1}[S]$. Sei $A = s^{-1}[\{v(0)\}]$, $B = s^{-1}[\{v(1)\}]$, $U = \bigcup_{x \in A} \{x, \rightarrow\}$, $V = \bigcup_{y \in B} \{y, \rightarrow\}$, $U' = U \cap s^{-1}[S]$, $V' = V \cap s^{-1}[S]$. $\{U', V'\}$ ist offene Überdeckung von $s^{-1}[S]$, $U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, somit gibt es $z_0 \in U' \cap V'$. Wegen $z_0 \in U'$ gibt es $x_0 \in A$ mit $x_0 \leq z_0$, $s(x_0) =$

$= v(0)$; wegen $z_0 \in V'$ existiert $y_0 \in B$ mit $y_0 \leq z_0$, also $v(1) = s(y_0) \leq s(z_0)$, $s(z_0) = v(1)$. Offenbar ist $\bar{v}: \underline{2} \longrightarrow C$ mit $\bar{v}(0) = x_0$, $\bar{v}(1) = z_0$ eine geeignete Liftung.

Wir greifen nun auf die bereits oben benutzten Beispiele aus 3.27. zurück und zeigen, daß die dort konstruierte Abbildung $f: (\mathcal{C}(E), <) \longrightarrow (E, \leq)$ ein zusammenhängender extremer Epimorphismus ist. Sei nämlich $A < E$ zusammenhängend und $f^{-1}[A] = B \cup C$; wir zeigen, daß B, C nicht separiert sind. Es gilt $A = f[B] \cup f[C]$, es existiert etwa $x \in f[B]^- \cap f[C]$, es gibt also $y = f(\bar{b}) \in f[B]$ mit $x \leq y = \sup_E \bar{b}$, sowie $\bar{c} \in C$ mit $x = f(\bar{c}) = \sup_E \bar{c}$. Es folgt $\{x\}, \{x, y\} \in f^{-1}[A]$, sogar $\{x\} \in C^-$, $\{y\} \in B^-$. Falls $\{x\} \in B$ oder $\{y\} \in C$, so sind wir fertig; es bleibt der Fall $\{x\} \in C$ und $\{y\} \in B$. Da $\{x, y\} \in f^{-1}[A] = B \cup C$, erhalten wir aber im Fall $\{x, y\} \in B$, daß $\{x\} \in B^-$, und im Fall $\{x, y\} \in C$ folgt $\{y\} \in C^-$.

Völlig dual können wir zeigen, daß auch die Abbildung $g: (C\mathcal{C}(E), <) \longrightarrow (E, \leq)$ zusammenhängend ist. Falls daher $(E, \leq)$ epi-zusammenhängend-projektiv ist, liefert ein schon oben benutztes Argument, daß $(E, \leq)$ längenendlich nach oben und unten ist.

Wir überlegen jetzt, daß $(E, \leq)$ dann auch keine Ketten mit mehr als zwei Elementen enthalten kann. Gäbe es doch eine Kette $\{0, 1, 2\} < E$, so betrachten wir folgende Situation:



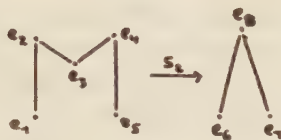
s sei definiert durch $s(a_1) = s(b_1) = s(c_1) = a_0$, $s(a_2) = s(b_2) = s(c_2) = b_0$, $s(a_3) = s(b_3) = s(c_3) = c_0$. Anhand von 1.10. ist leicht einzusehen, daß s zusammenhängender Epimorphismus ist; schließlich sei $v: E \longrightarrow D$ definiert durch

$$v(x) = \begin{cases} c_0, & x \leq 0 \\ b_0, & x \not\leq 0 \text{ und } x \leq 1 \\ a_0, & x \not\leq 0 \text{ und } x \not\leq 1 \end{cases}$$

v ist ersichtlich monoton, kann aber offenbar nicht gegen s geliftet werden.

Durch entsprechende Überlegungen läßt sich zeigen, daß $(E, \leq)$

Summe von höchstens zweielementigen Ketten ist. Wir beschränken uns darauf, geeignete zusammenhängende Epimorphismen anzugeben.



Es sei $s_1(d_1) = d_6$, $s_1(d_5) = d_7$, $s_1(d_2) = s_1(d_3) = s_1(d_4) = d_8$; $s_2(e_1) = e_6$, $s_2(e_5) = e_7$, $s_2(e_2) = s_2(e_3) = s_2(e_4) = e_8$.

4.11. Satz: $(E, \leq) \in |\mathcal{C}_2|$ ist genau dann epi-zusammenhängend-projektiv, wenn $(E, \leq)$ Summe von höchstens zweielementigen Ketten ist.

§ 5. Vollständige Verbände sind reflektiv!

Wir haben in § 2 die Frage aufgeworfen, ob die Kategorie $\overline{\mathcal{O}}$ der vollständigen Verbände und stark sup-treuen Abbildungen reflektiv ist in der Kategorie $\mathcal{G}$ bzw. der Kategorie $\overline{\mathcal{G}}$ der geordneten Mengen und stark sup-treuen Abbildungen. Wir wenden uns zunächst dem Problem zu, ob $\overline{\mathcal{O}}$ reflektiv in $\mathcal{G}$ ist; falls die Frage positiv beantwortet werden kann, so ist aufgrund der allgemeinen Überlegung von 3.31. klar, daß dann $\overline{\mathcal{O}}$ sogar extrem-mono-reflektiv in $\mathcal{G}$ ist. Wir formulieren die Fragestellung nochmals als universelles Abbildungsproblem:

Vorgelegt sei eine geordnete Menge $(E, \leq) \in |\mathcal{G}|$. Gesucht sind ein vollständiger Verband $(\overline{E}, \leq) \in |\overline{\mathcal{O}}|$ und eine monotone Abbildung $\varphi_E: (E, \leq) \longrightarrow (\overline{E}, \leq)$ mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & V \\ \varphi_E \downarrow & \nearrow \bar{u} & \\ \overline{E} & & \end{array}$$

Zu jeder monotonen Abbildung $u: (E, \leq) \longrightarrow (V, \leq)$ in ein Objekt $(V, \leq) \in |\overline{\mathcal{O}}|$ existiert genau eine stark sup-treue Abbildung $\bar{u}: (\overline{E}, \leq) \longrightarrow (V, \leq)$ mit $u = \bar{u} \circ \varphi_E$.

Falls das Problem lösbar ist, ist φ_E ein extremer Monomorphismus in $\mathcal{G}$. Es bezeichne $\mu_E: (E, \leq) \longrightarrow (N(E), \leq)$ die Einbettung in die MacNeillesche Vervollständigung.

5.1. Def.: $\mathcal{C}$ sei eine Kategorie. Ein Morphismus $A \xrightarrow{w} B \in M_{\mathcal{C}}$ heißt wesentlich, wenn gilt:

- 1) w ist extremer Monomorphismus
- 2) Ist $B \xrightarrow{s} C \in M_{\mathcal{C}}$ derart, daß s extremer Monomorphismus ist, so ist s ein extremer Monomorphismus.

Wie in [2] gezeigt wurde, ist μ_E wesentlich in $\mathcal{G}$. In § 4

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mu_E} & N(E) \\ \varphi_E \downarrow & \nearrow \eta & \\ \overline{E} & & \end{array}$$

haben wir gesehen, daß die extrem-injektiven Objekte von $\mathcal{G}$

genau die vollständigen Verbände sind. Es existiert also eine monotone Abbildung n mit $n \circ \mu_E = \varphi_E$, sofern wir eine Lösung $((\bar{E}, <), \varphi_E)$ unseres Problems finden. Da μ_E wesentlich ist, ist n dann sogar extremer Monomorphismus in $\mathcal{Q}$, also eine isotone Einbettung. Dies liefert uns einen Ansatz zur Lösung der Aufgabe. Unter Verwendung des in § 1 konstruierten Funktors $T: \mathcal{Q} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definieren wir in

5.2. Def.: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$.

- 1) $\bar{E} = \{A \mid A = A^- < E\}$ werde mit der Inklusion als Ordnungsrelation versehen; es gilt dann $(\bar{E}, <) \in |\mathfrak{A}|$.
- 2) $\varphi_E: (E, \leq) \longrightarrow (\bar{E}, <)$ sei durch $\varphi_E(x) = \{x\}^-$ definiert; φ_E ist monoton.

Wir zeigen nun, daß das Paar $((\bar{E}, <), \varphi_E)$ Lösung unseres oben formulierten universellen Abbildungsproblems ist. Sei

$u: (E, \leq) \longrightarrow (V, <)$ monoton, wobei $(V, <) \in |\mathfrak{A}|$. Wir definieren $\bar{u}: \bar{E} \longrightarrow V$ vermöge $\bar{u}(A) = \sup_V u[A]$. Offenbar ist $\bar{u}$ monoton, und es gilt $\bar{u}(\{x\}^-) = u(x)$, da u monoton ist (wir erinnern uns: $\{x\}^- = \{y \mid y \leq x\}$). $\bar{u}$ ist stark sup-treu: Sei

$\mathcal{G} < \bar{E}$, dann gilt $\sup_{\bar{E}} \mathcal{G} = \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A$; trivialerweise ist

$\bar{u}(\sup_{\bar{E}} \mathcal{G})$ obere Schranke von $\bar{u}[\mathcal{G}]$. Ist $z \in V$ obere Schranke von $\bar{u}[\mathcal{G}]$, so bedeutet dies $\bar{u}[A] < z$ für jedes $A \in \mathcal{G}$, also $\bar{u}(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A) < z$, und dies zeigt $\bar{u}(\sup_{\bar{E}} \mathcal{G}) = \sup_V \bar{u}[\mathcal{G}]$.

$\bar{u}$ ist als stark sup-treue Abbildung eindeutig bestimmt, denn für jedes $A \in \bar{E}$ gilt $A = \sup_{\bar{E}} \{x\}^-$, so daß notwendig $\bar{u}(A) = \sup_{x \in A} \bar{u}(\{x\}^-) = \sup_V u[A]$. Damit ist gezeigt

5.3. Satz: Die Kategorie $\mathfrak{A}$ ist extrem-mono-reflektiv in der Kategorie $\mathcal{Q}$.

Wie leicht einzusehen ist, ist die Reflexionsabbildung φ_E für kein Objekt $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ ein Isomorphismus: Für $\emptyset \in \bar{E}$ gilt stets $\emptyset \notin \text{Bild } \varphi_E$. Der Grund hierfür ist, daß $\mathfrak{A}$ keine volle Unterkategorie von $\mathcal{Q}$ ist.

Wir wollen diese Reflexion näher studieren; insbesondere wollen wir wissen: Zu welchen Objekten $(F, <) \in |\mathcal{Q}|$ existiert ein Objekt $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ derart, daß $(\bar{E}, <)$ $\mathcal{Q}$ -isomorph ist zu

$(F, <)$ Zunächst studieren wir den Reflektor auf der Unterkategorie $\mathcal{C}$ und bemerken

5.4. Lemma: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. Dann gilt:
 $(E, \leq) \in |\mathcal{C}| \iff (\bar{E}, <) \in |\mathcal{C}|$.

Beweis: Sei nämlich $(E, \leq) \in |\mathcal{C}|$, $A, B \in \bar{E}$. Falls es zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $a \leq b$ gilt, folgt sofort $A \subset B$; andernfalls existiert ein $a \in A$ so, daß $b \not\leq a$ für jedes $b \in B$, und dies bedeutet $B \subset A$. Die Umkehrung ist klar.

5.5. Lemma: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{C}|$. Dann ist $(\bar{E}, <)$ nulldimensional bezüglich der Intervalltopologie.

5.6. Lemma: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{C}|$, $E \neq \emptyset$, nulldimensional bezüglich der Intervalltopologie und überdies vollständiger Verband. Dann existiert $(H, \leq) \in |\mathcal{C}|$ so, daß $(\bar{H}, <)$ zu $(E, \leq)$ isomorph ist.

Beweis: Im Fall $\text{Card } E = 1$ wählen wir $H = \emptyset$. Andernfalls sei $H = \{x \mid x \in E, x \text{ besitzt direkten Vorgänger in } (E, \leq)\}$ versehen mit der von $(E, \leq)$ induzierten Ordnung. Wir definieren $\alpha: (E, \leq) \longrightarrow (\bar{H}, <)$ durch $\alpha(y) = \{x \mid x \in H, x \leq y\} \in \bar{H}$, und $\beta: (\bar{H}, <) \longrightarrow (E, \leq)$ durch $\beta(A) = \sup_E A$. Da $(E, \leq)$ nulldimensional ist in der Intervalltopologie, ist $\beta \circ \alpha = 1_E$ unmittelbar einsichtig. Um $\alpha \circ \beta = 1_{\bar{H}}$ nachzuweisen, überlegen wir folgendes: Ohnehin gilt $\alpha \circ \beta(A) \supset A$ für jedes $A \in \bar{H}$; falls $\beta(A) \in H$, so sind wir fertig, und im Fall $\beta(A) \notin H$ ist alles trivial.

Um dieses Ergebnis auf den allgemeinen Fall in geeigneter Weise ausdehnen zu können, bemerken wir

5.7. Def.: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. $x \in E$ heißt irreduzibel, wenn gilt: Für jede Teilmenge $A \subset E$ mit $x = \sup_E A$ gilt $x \in A$.

5.8. Lemma: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{C}|$. Dann gilt:

- 1) Ein Element $x \in E$ ist genau dann irreduzibel, wenn x einen direkten Vorgänger besitzt.
- 2) Ist $(E, \leq)$ ein vollständiger Verband, so ist $(E, \leq)$ sogar

ein vollständig distributiver vollständiger Verband.

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir

5.9. Satz: Sei $(F, <) \in |\mathcal{G}|$. Es gibt genau dann ein Objekt $(E, \leq) \in |\mathcal{G}|$ derart, daß $(\bar{E}, <)$ isomorph ist zu $(F, <)$, wenn gilt:

- 1) $F \neq \emptyset$
- 2) $(F, <)$ ist ein vollständig distributiver vollständiger Verband
- 3) Es existiert eine Teilmenge $H \subset F$ von irreduziblen Elementen so, daß jedes Element aus F Supremum einer geeigneten Teilmenge von H ist.

Beweis: Wir wollen zunächst die Notwendigkeit der Bedingungen einsehen: Offenbar ist stets $\bar{E} \neq \emptyset$, da $\emptyset \in \bar{E}$, und $(\bar{E}, <)$ ist ein vollständig distributiver vollständiger Verband. Überdies ist $\{x\}^-$ irreduzibel in $(\bar{E}, <)$ für jedes $x \in E$, und jedes $A \in \bar{E}$ ist Supremum der $\{x\}^-$ mit $x \in A$.

Umgekehrt genüge nun $(F, <)$ den obigen Bedingungen. Falls $\text{Card } F = 1$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls definieren wir $\alpha: (F, <) \longrightarrow (\bar{H}, <)$ und $\beta: (\bar{H}, <) \longrightarrow (F, <)$ mittels $\alpha(y) = \{x \mid x \in H, x \leq y\}$, $\beta(A) = \sup_F A$. Wegen Bedingung 3) ist $\beta \circ \alpha = 1_F$ sofort einzusehen. Trivialerweise gilt stets $\alpha \circ \beta(A) \supset A$ für jedes $A \in \bar{H}$. Wir zeigen: $\alpha \circ \beta(A) \subset A$. Sei $z \in \alpha \circ \beta(A) = \{x \mid x \in H, x < \sup_F A\}$, sei $s = \sup_F A$.

Es folgt $\inf_F \{z, s\} = z = \sup_F \{\inf_F \{z, a\} \mid a \in A\}$, da $(F, <)$ vollständig distributiv ist. $z \in H$ ist irreduzibel, also gibt es $a_0 \in A$ mit $z = \inf_F \{z, a_0\}$, somit $z < a_0$. Wegen $A = A^-$ sehen wir $z \in A$.

Mit Hilfe von [12] können wir diesen Satz wie folgt fassen:

5.9. Satz: Sei $(F, <) \in |\mathcal{G}|$. Es gibt genau dann ein Objekt $(E, \leq) \in |\mathcal{G}|$ derart, daß $(\bar{E}, <)$ isomorph ist zu $(F, <)$, wenn $(F, <)$ ein vollständiger Mengenring ist.

Durch eine Modifizierung unserer Konstruktion können wir zeigen, daß auch eine weitere Unterkategorie von $\mathcal{G}$, die wegen

der in ihr enthaltenen Objekte von Interesse ist, in $\mathcal{Q}$ reflektiv ist.

5.10. Def.: Ein Objekt $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$ heißt sup-abgeschlossen, wenn jede nichtleere Teilmenge von E ein Supremum in $(E, \leq)$ besitzt.

5.11. Satz: Die Kategorie $\overline{\mathcal{Q}}$ der sup-abgeschlossenen geordneten Mengen und sup-treuen Abbildungen ist extrem-mono-reflektiv in der Kategorie $\mathcal{Q}$.

Beweis: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. Wir benutzen wieder den Funktor $T: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{A}$ und definieren $\overline{E} = \{A \mid A = A^- < E, A \neq \emptyset\}$. $\overline{\varphi}_E: (E, \leq) \rightarrow (\overline{E}, <)$ wird durch $\overline{\varphi}_E(x) = \{x\}^-$ definiert. Der Beweis verläuft nun analog zum Beweis von 5.3.

Während die Reflexionsabbildung φ_E für kein Objekt ein Isomorphismus ist, können wir jetzt zeigen

5.12. Satz: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. Die Reflexionsabbildung $\overline{\varphi}_E$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $(E, \leq)$ invers wohlgeordnet ist.

Beweis: Falls $(E, \leq)$ invers wohlgeordnet ist, ist $\overline{\varphi}_E$ offenbar ein Isomorphismus. Sei umgekehrt $\overline{\varphi}_E$ ein Isomorphismus. Sei $A < E$, $A \neq \emptyset$. $\overline{\varphi}_E[A]$ besitzt in $(\overline{E}, <)$ ein Supremum $\overline{\varphi}_E(x)$; da dies insbesondere eine obere Schranke ist, folgt $A < \{x\}^-$, somit auch $\bigcup_{a \in A} \{a\}^- < \{x\}^-$. Andererseits ist $\bigcup_{a \in A} \{a\}^-$ obere Schranke von $\overline{\varphi}_E[A]$, daher $\{x\}^- < \bigcup_{a \in A} \{a\}^-$, mithin $\{x\}^- = \bigcup_{a \in A} \{a\}^-$, es gibt $a \in A$ mit $x \in \{a\}^-$, so daß $\{x\}^- < \{a\}^- < \{x\}^-$, und dies zeigt $x = a \in A$, denn $(E, \leq)$ ist T_0 -Raum. Offensichtlich ist a das größte Element von A .

Wir kommen jetzt auf das zweite der in § 2 betrachteten universellen Abbildungsprobleme zurück. Wir werden zeigen, daß es stets eine Lösung besitzt, daß also $\overline{\mathcal{Q}}$ reflektiv in $\mathcal{Q}$ ist.

5.13. Def.: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. $A \subset E$ heißt Dedekind-abgeschlossen, wenn gilt:

- 1) $A = A^-$ bezüglich der Rechtstopologie
 - 2) Ist $S \subset A$ und existiert $s = \sup_E S$, so gilt $s \in A$.
- Die Gesamtheit der Dedekind-abgeschlossenen Teilmengen von $(E, \leq)$ bezeichnen wir mit $S(E)$.

Unmittelbar einzusehen ist

5.14. Lemma: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. Dann gilt:

- 1) Für jedes $A \in N(E)$ gilt $A \in S(E)$
- 2) Ist $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie Dedekind-abgeschlossener Teilmengen von $(E, \leq)$, so gilt $\bigcap_{i \in I} C_i \in S(E)$.

5.15. Lemma: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$, dann gilt $(S(E), <) \in |\overline{\mathcal{Q}}|$.

5.16. Lemma: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. $\Psi_E: (E, \leq) \longrightarrow (S(E), <)$ sei definiert durch $\Psi_E(x) =]\leftarrow, x]$. Ψ_E ist stark sup-treu.

Beweis: $\Psi_E(x) \in S(E)$ ist wegen 5.14.1. klar. Sei $U \subset E$, es existiere $s = \sup_E U$. Da Ψ_E offenbar monoton ist, ist $\Psi_E(s)$ obere Schranke von $\Psi_E[U]$. Sei $A \in S(E)$ obere Schranke von $\Psi_E[U]$, so heißt dies $\Psi_E(x) \subset A$ für jedes $x \in U$, also $U \subset A$, somit $s \in A$ wegen $A \in S(E)$, und dies zeigt $\Psi_E(s) \subset A$.

5.17. Lemma: Seien $(E, \leq), (F, <) \in |\overline{\mathcal{Q}}|$, $f \in M_{\overline{\mathcal{Q}}}(E, F)$. Ist dann $x \in F$, so gilt $X = f^{-1}[]\leftarrow, x] \in S(E)$.

Beweis: $X = X^-$ ist unmittelbar klar, da f stetig ist. Sei nun $U \subset X$, es existiere $s = \sup_E U$. Wir beachten, daß f stark sup-treu ist und sehen, daß wegen $f[U] \subset f[X] \subset]\leftarrow, x]$ gilt $f(s) = \sup_F f[U] \subset x$. Dies zeigt $s \in X$.

5.18. Satz: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. Zu jedem vollständigen Verband $(V, <)$ und jeder stark sup-treuen Abbildung $f: (E, \leq) \longrightarrow (V, <)$ gibt es genau eine stark sup-treue Abbildung

$$\hat{f}: (S(E), <) \longrightarrow (V, <)$$

mit $f = \hat{f} \circ \Psi_E$. Mit anderen Worten: $\overline{\mathcal{Q}}$ ist reflektiv in $\overline{\mathcal{Q}}$.

Beweis: Falls $\hat{f}$ existiert, so ist $\hat{f}$ notwendig eindeutig, denn da für jedes $A \in S(E)$ gilt $A = \sup_{x \in A} \Psi_E(x)$, so muß $\hat{f}(A) = \sup_V \hat{f} \circ \Psi_E(x) = \sup_V f[A]$ gelten.

Wir definieren nun $\hat{f}$ durch diese Vorschrift und haben zu zeigen, daß $\hat{f}$ stark sup-treu ist; $\hat{f} \circ \Psi_E = f$ ist evident.

Sei $\mathcal{G} \subset S(E)$, $U = \sup_{S(E)} \mathcal{G}$; wegen 5.14.2. wissen wir, daß U der Durchschnitt aller $B \in S(E)$ mit $B \supset \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A$ ist. Da $\hat{f}$

offenbar monoton ist, ist $\hat{f}(U)$ obere Schranke von $\hat{f}[\mathcal{G}]$; sei $s = \sup_V \hat{f}[\mathcal{G}]$, so ist also $s \leq \hat{f}(U)$. Aufgrund von 5.17.

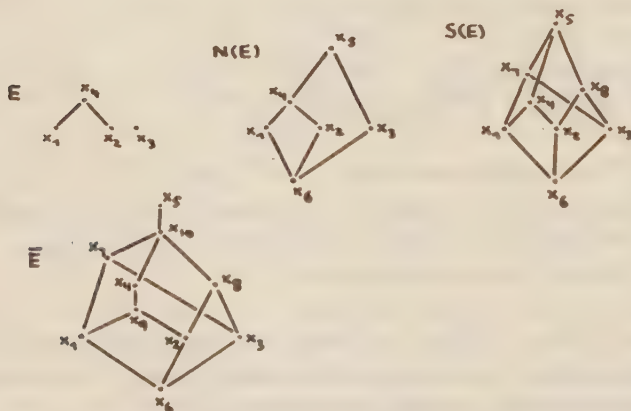
wissen wir, daß $B_0 = f^{-1}([s] \leftarrow, s]) \in S(E)$; da $\hat{f}(A) = \sup_V f[A] < s$ für jedes $A \in \mathcal{G}$, so sehen wir, daß $\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \subset B_0$. Dies zeigt $\hat{f}(U) < \hat{f}(B_0) < s$.

5.19. Satz: Sei $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$. Dann gilt:

- 1) $E \subset N(E) \subset S(E) \subset \bar{E}$
- 2) $(E, \leq) \in |\mathcal{C}| \iff (S(E), \leq) \in |\mathcal{C}|$.

Beweis: 1) ist sofort einleuchtend, und 2) folgt aus 1) und Lemma 5.4.

Wir geben nun ein Beispiel eines Objekts $(E, \leq) \in |\mathcal{Q}|$, dessen Vervollständigungen $N(E)$, $S(E)$ und $\bar{E}$ paarweise verschieden sind.



In Analogie zu 2.4. können wir zeigen

5.20. Satz: Sei $(E, \leq) \in |\bar{\mathcal{Q}}|$. $\Psi_E: (E, \leq) \longrightarrow (S(E), \leq)$ ist

genau dann Isomorphismus, wenn $(E, \leq)$ vollständiger Verband ist.

Beweis: $\overline{\mathcal{O}}$ ist volle Unterkategorie von $\overline{\mathcal{G}}$, $S: \overline{\mathcal{G}} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}$ ist Reflektor, und Ψ_E ist Reflexionsmorphismus; die Behauptung läßt sich natürlich auch unmittelbar anhand der Konstruktion einsehen.

§ 6. Wallman-Funktor

Ist $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$ ein T_1 -Raum, so läßt sich die Wallmansche Quasikomaktifizierung $w(X)$ konstruieren; $w(X)$ ist genau dann kompakt, wenn $(X, \mathfrak{X})$ normal ist, und stimmt dann mit der Stone-Čech-Kompaktifizierung βX überein. Bekanntlich wird aber durch die Wallmansche Konstruktion kein Funktor definiert. Wir illustrieren dies anhand eines einfachen Beispiels. Wir betrachten den diskreten Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und definieren $f: (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ durch

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ n+1, & n = 2k+1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

f ist trivialerweise stetig; $\mathcal{F} = \{A \mid A \subset \mathbb{N}, 1 \in A\}$ ist ein Ultrafilter abgeschlossener Mengen. Offenbar aber ist der durch $f^{-1}[\mathcal{F}]$ erzeugte Filter kein Ultrafilter, und es ist auch nicht in kanonischer Weise möglich, dem Filter $(f^{-1}[\mathcal{F}])$ einen Ultrafilter zuzuordnen.

Unser Ziel ist zunächst, durch geeignete Modifizierung des Wallmanschen Verfahrens Funktoren zu gewinnen.

6.1. Def.: Wir definieren eine Kategorie $\mathcal{V}_0$ wie folgt:

Objekte: distributive Verbände mit 0 und 1

Morphismen: Verbandshomomorphismen, die 0 in 0 und 1 in 1 überführen

6.2. Def.: Sei $(V, \leq) \in \mathcal{V}_0$. $F \subset V$ heißt Filter, wenn gilt:

- 1) $F \neq \emptyset, F \neq V$
- 2) $F = F^0$ bezüglich der Rechtstopologie
- 3) $x, y \in F \implies x \wedge y \in F$

F heißt maximaler Filter, Ultrafilter, wenn F in der durch Inklusion geordneten Menge der Filter von V maximal ist.

F heißt Primfilter, wenn F Filter ist und überdies gilt:

- 4) $x, y \in V, x \vee y \in F \implies x \in F \text{ oder } y \in F$.

Die nun folgende Theorie entwickeln wir nur für die Objekte aus $\mathcal{V}_0$ und nicht für die Objekte von $\mathcal{V}$; der Grund hierfür ist folgender: Während in einem Verband mit $0 \neq 1$ zwar maxi-

male Filter, aber nicht notwendig Primfilter existieren -
Beispiel:



enthalten Objekte aus $\mathcal{A}$ "genügend viele" Primfilter. Wir präzisieren dies in

6.3. Satz: Sei $(V, \leq) \in |\mathcal{A}|$, $x, y \in V$, $x \neq y$. Dann existiert ein Primfilter $P \subset V$ so, daß $\text{Card}(P \cap \{x, y\}) = 1$.

6.4. Def.: 1) Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\text{Top}|$. Wir sagen, daß $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(X)$ die EDE (= endliche Durchschnittseigenschaft) besitzt, wenn $\bigcap_{Y \in \mathcal{Y}'} Y \neq \emptyset$ für jedes endliche Teilsystem $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$.

2) Sei $(V, \leq) \in |\mathcal{A}|$. $W \subset V$ besitzt die VEDE (= verbandstheoretische EDE), wenn $W \neq \emptyset$ und $\inf_V A \neq 0$ für jede endliche Teilmenge $A \subset W$, $A \neq \emptyset$.

6.5. Lemma: Sei $(V, \leq) \in |\mathcal{A}|$; $W \subset V$ habe die VEDE. Dann gibt es einen maximalen Filter $F \subset V$ mit $F \supset W$.

Beweis: Sei $\mathcal{G} = \{T \mid T \subset V \text{ hat VEDE}\}$. $(\mathcal{G}, \subset)$ ist offenbar induktiv geordnet. Das Zornsche Lemma in verschärfter Form zeigt, daß es ein in $(\mathcal{G}, \subset)$ maximales Element F mit $F \supset W$ gibt. Es ist klar, daß F ein maximaler Filter in V ist.

6.6. Lemma: Sei $(V, \leq) \in |\mathcal{A}|$. Ist $F \subset V$ maximaler Filter, so ist F ein Primfilter.

Beweis: Seien $x, y \in V$, $\{x, y\} \cap F = \emptyset$. Es gibt dann $x_1, x_2 \in F$ so, daß $x_1 \wedge x = 0$, $x_2 \wedge y = 0$, da man sonst sofort $x, y \in F$ erschließen könnte. Daher ist $x_1 \wedge x_2 \wedge x = 0$, $x_1 \wedge x_2 \wedge y = 0$, also auch $(x_1 \wedge x_2) \wedge (x \vee y) = 0$, woraus $x \vee y \notin F$ folgt.

Wir wollen kurz auf die Bedeutung der Primfilter eingehen und erlauben uns einen Exkurs über die Darstellung von Filtern in Objekten aus $\mathcal{A}$.

6.7. Lemma (BIRKHOFF-FRINK-GERICKE, s. [3] und [8]): Sei $(V, \leq) \in \mathcal{N}_d$, $F \subset V$ sei Filter, $x \in V - F$. Es gibt dann einen Primfilter $P \subset V$ mit $x \in V - P$, $P \supset F$.

6.8. Def.: Sei $(V, \leq) \in \mathcal{N}_d$, $F \subset V$ sei Filter. Ein Primfilter $P \subset V$ heißt minimaler Primfilter zu F , wenn P minimales Element in der durch Inklusion geordneten Menge

$$\mathcal{P}_F = \{ Q \mid Q \subset V \text{ Primfilter, } Q \supset F \}$$

ist. Wir bemerken: $\mathcal{P}_F \neq \emptyset$ aufgrund von 6.5. und 6.6.

6.9. Lemma: Sei $(V, \leq) \in \mathcal{N}_d$, $F \subset V$ sei Filter, $x \in V - F$. Es existiert dann ein minimaler Primfilter P zu F mit $x \in V - P$.

Beweis: Sei $\mathcal{P}(F, x) = \{ Q \mid Q \subset V \text{ Primfilter, } Q \supset F, x \in V - Q \}$. Wegen 6.7. ist $\mathcal{P}(F, x) \neq \emptyset$. $(\mathcal{P}(F, x), \supset)$ ist offenbar induktiv geordnet; sei P maximal in $(\mathcal{P}(F, x), \supset)$. P ist minimal in $(\mathcal{P}_F, \subset)$: Ist Q Primfilter mit $F \subset Q \subset P$, so ist $Q \in \mathcal{P}(F, x)$, also $Q = P$.

6.10. Satz: Sei $(V, \leq) \in \mathcal{N}_d$, $F \subset V$ sei Filter. Dann ist F Durchschnitt der zu F minimalen Primfilter.

6.11. Lemma: Seien $(V, \leq), (W, <) \in \mathcal{N}_d$, $f \in M_{\mathcal{N}_d}(V, W)$. Ist dann $P \subset W$ ein Primfilter, so ist $f^{-1}[P]$ ein Primfilter in V .

Beweis: $f^{-1}[P] \neq \emptyset$, da $1 \in f^{-1}[P]$, $f^{-1}[P] \neq V$, da $0 \notin f^{-1}[P]$. f ist stetig bezüglich der Rechtstopologie, also $f^{-1}[P]$ offen. Sind $x, y \in f^{-1}[P]$, so gilt $f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) \in P$, mithin $x \wedge y \in f^{-1}[P]$, und sind $x, y \in V$ mit $x \vee y \in f^{-1}[P]$, so zeigt dies $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \in P$, $f(x) \in P$ oder $f(y) \in P$, $x \in f^{-1}[P]$ oder $y \in f^{-1}[P]$.

6.12. Def.: Sei $(V, \leq) \in \mathcal{N}_d$. Wir bezeichnen mit $\text{Spec}(V)$ die Menge der Primfilter von V . $\text{Spec}(V)$ werde wie folgt topologisiert: Subbasis für die abgeschlossenen Mengen sei das System $\{ \phi_x \mid x \in V \}$, wobei $\phi_x = \{ P \mid P \in \text{Spec}(V), x \in P \}$. Wegen $\phi_x \cup \phi_y = \phi_{x \vee y}$, $x, y \in V$, ist dies sogar eine Basis für die abgeschlossenen Mengen. Den zugehörigen topologischen Raum nennen wir $\delta(V)$.

6.13. Lemma: Sei $(V, \leq) \in |\mathcal{V}_d|$. Dann gilt:

- 1) $\mathcal{Y}(V)$ ist T_0 -Raum
- 2) $\{P\}^- = \{Q \mid Q \in \text{Spec}(V), P \leq Q\}$ für jedes $P \in \text{Spec}(V)$
- 3) $\mathcal{Y}(V)$ ist genau dann T_1 -Raum, wenn jeder Primfilter von V maximaler Filter ist.
- 4) $\mathcal{Y}(V)$ ist quasikompakt.

Beweis: 1) Seien $P, Q \in \text{Spec}(V)$, $P \neq Q$, etwa $P \not\leq Q$, dann gibt es $x \in P$, $x \notin Q$, mithin ist $Q \in \text{Spec}(V) - \phi_x$, $P \notin \text{Spec}(V) - \phi_x$.

2) Sei $P \in \text{Spec}(V)$; es ist $\{P\}^- = \bigcap_{P \in \phi_x} \phi_x = \bigcap_{x \in P} \phi_x = \{Q \mid Q \in \text{Spec}(V), P \leq Q\}$.

3) ist unmittelbar einsichtig.

4) Sei $\{\phi_x \mid x \in W\}$, $W \subset V$, ein System mit EDE. Wir zeigen:

$\bigcap_{x \in W} \phi_x \neq \emptyset$. W hat die VEDE, denn sind $x_1, \dots, x_n \in W$, so ist $\bigcap_{i=1, \dots, n} \phi_{x_i} = \phi_{x_1 \wedge \dots \wedge x_n} \neq \emptyset$, es gibt $Q \in \phi_{x_1 \wedge \dots \wedge x_n}$,

$x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in Q$, also $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \neq 0$.

Aufgrund von 6.5. und 6.6. existiert ein Primfilter $P \supset W$, und es gilt offenbar $P \in \bigcap_{x \in W} \phi_x$, da dies mit $W \subset P$ gleichbedeutend ist.

6.14. Satz: Seien $(V, \leq), (W, <) \in |\mathcal{V}_d|$, $f \in M_{\mathcal{V}_d}(V, W)$. Vermöge $\mathcal{Y}(f)(Q) = f^{-1}[Q]$ wird eine stetige Abbildung

$$\mathcal{Y}(f): \mathcal{Y}(W) \longrightarrow \mathcal{Y}(V)$$

definiert. $\mathcal{Y}: \mathcal{V}_d \longrightarrow \text{Top}_0$ ist kontravarianter Funktor.

Beweis: Sei $x \in V$, wir zeigen: $\mathcal{Y}(f)^{-1}[\phi_x] = \phi_{f(x)}$. Dies ist aber evident, denn $P \in \phi_{f(x)}$ ist gleichbedeutend mit $f(x) \in P$, $x \in f^{-1}[P] = \mathcal{Y}(f)(P)$, und dies mit $\mathcal{Y}(f)(P) \in \phi_x$, also mit $P \in \mathcal{Y}(f)^{-1}[\phi_x]$. Die Funktoreigenschaft von $\mathcal{Y}$ ist unmittelbar klar.

6.15. Satz: Durch Komposition von $\mathcal{Y}$ mit dem Funktor der T_2 -Reflexion erhält man einen kontravarianten Funktor von der Kategorie $\mathcal{V}_d$ in die Kategorie $\mathcal{K}$ der kompakten topologischen Räume und stetigen Abbildungen: $T_2 \circ \mathcal{Y}: \mathcal{V}_d \longrightarrow \mathcal{K}$.

Wir wollen nun an einem Beispiel demonstrieren, wie sich diese Theorie in der Topologie verwerten läßt.

6.16. Def.: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$, dann definieren wir

$$\alpha(X) = \{A \mid A = A^- \subset X\}.$$

6.17. Lemma: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$, dann gilt $(\alpha(X), \subset) \in |\mathfrak{W}_a|$.

6.18. Lemma: Seien $(X, \mathfrak{X}), (Y, \mathfrak{Y}) \in |\text{Top}|$, $f \in C(X, Y)$. Vermöge

$$\alpha(f)(A) = f^{-1}[A] \text{ wird ein } \mathfrak{W}_a\text{-Morphismus}$$

$$\alpha(f): \alpha(Y) \longrightarrow \alpha(X)$$

definiert. $\alpha: \text{Top} \longrightarrow \mathfrak{W}_a$ ist kontravarianter Funktor.

6.19. Lemma: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$. Es existiert dann eine stetige Abbildung $j: (X, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{Y}(\alpha(X))$. j ist Einbettung, falls $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}_0|$. Es gilt stets $j[X]^- = \text{Spec}(\alpha(X))$, überdies $j[A]^- = \phi_A$ für jedes $A \in \alpha(X)$.

Durch Komposition mit dem Reflexionsmorphismus resultiert hieraus eine stetige Abbildung $(X, \mathfrak{X}) \longrightarrow T_2(\mathfrak{Y}(\alpha(X)))$.

Beweis: Sei $x \in X$, $j(x) = \{A \mid A \in \alpha(X), x \in A\}$. Offenbar gilt $j(x) \in \text{Spec}(\alpha(X))$, und $\{x\}^-$ ist kleinstes Element von $j(x)$. Sei $B \in \alpha(X)$, wir zeigen: $j^{-1}[\phi_B] = B$: Ist $x \in B$, so ist $B \in j(x)$, $j(x) \in \phi_B$, also $B \subset j^{-1}[\phi_B]$; ist umgekehrt $y \in j^{-1}[\phi_B]$, so sehen wir $j(y) \in \phi_B$, $B \in j(y)$, $y \in B$.

Ist $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}_0|$, $x, y \in X$, $x \neq y$, so gilt $\{x\}^- \neq \{y\}^-$, also $j(x) \neq j(y)$. Ist ferner $B \in \alpha(X)$, so sieht man leicht, daß $j[B] = \phi_B \cap j[X]$.

Sei $A \in \alpha(X)$, $\text{Spec}(\alpha(X)) - \phi_A \neq \emptyset$, dann ist $A \neq X$; sei $x \in X - A$, so gilt $j(x) \in \text{Spec}(\alpha(X)) - \phi_A$, und dies zeigt, daß $j[X]$ dicht ist.

Sei $A \in \alpha(X)$; $j[A] \subset \phi_A$ ist unmittelbar klar. Sei $\mathfrak{P} \in \phi_A$,

$\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\alpha(X)) - \phi_B \in \mathfrak{U}(\mathfrak{P})$ mit $B \in \alpha(X)$. Wäre

$(X - B) \cap A = \emptyset$, so folgte $A \subset X - (X - B) = B$, also $B \in \mathfrak{P}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{P} \notin \phi_B$. Ist nun $x \in (X - B) \cap A$, so sieht man $j(x) \in \text{Spec}(\alpha(X)) - \phi_B$.

6.20. Lemma: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\mathfrak{X}|$, $X \neq \emptyset$. Für jedes

$\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\alpha(X))$ ist dann $\bigcap_{A \in \mathfrak{P}} A$ einelementig.

Beweis: $\mathcal{P} \subset \alpha(X)$ besitzt offenbar die EDE, $(X, \mathcal{X})$ ist quasi-kompakt, mithin $D = \bigcap_{A \in \mathcal{P}} A \neq \emptyset$. Sei $x \in D$, $y \in X - \{x\}$. Es gibt $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$; $(X - U) \cup (X - V) = X \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ ist Primfilter, daher $X - U \in \mathcal{P}$ oder $X - V \in \mathcal{P}$, und der erste Fall kann wegen $x \in D$ nicht eintreten, was $y \in D$ zeigt.

Wir geben nun ein Beispiel eines kompakten Raumes $(X, \mathcal{X})$ derart, daß in $\alpha(X)$ Primfilter existieren, die nicht maximal sind. Sei $X = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$; $\alpha(X)$ bestehe aus allen endlichen Teilmengen von X sowie denjenigen $A \subset X$, für die ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\{n, \rightarrow\} \cup \{\omega\} \subset A$ existiert. $(X, \mathcal{X})$ ist offensichtlich kompakt; sei $\mathcal{P} = \{A \mid A \in \alpha(X), \text{ es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \{n, \rightarrow\} \cup \{\omega\} \subset A\}$. Es gilt $\mathcal{P} \in \mathcal{S}(\alpha(X))$, jedoch ist $\mathcal{P}$ nicht maximal, hingegen ist $\mathcal{P} \cup \{\omega\}$ maximal.

6.21. Lemma: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\mathcal{X}|$, $X \neq \emptyset$. Es gibt dann zu jedem $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\alpha(X))$ genau einen maximalen Filter $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{P})$, $\mathcal{M} \in \text{Spec}(\alpha(X))$ mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$.

Beweis: Wir benutzen 6.20.; sei $\bigcap_{A \in \mathcal{P}} A = \{x\}$, dann ist $\mathcal{M} = \{A \mid A \in \alpha(X), x \in A\}$ offenbar der einzige maximale Filter, der über $\mathcal{P}$ liegt. Wir bemerken, daß ein alternativer Beweis analog zum Beweis von 6.28. geführt werden kann.

6.22. Lemma: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\mathcal{X}|$, $X \neq \emptyset$. Sei $A \in \alpha(X)$, $\mathcal{Q} \in \text{Spec}(\alpha(X))$. Ist dann $A \notin \mathcal{M}(\mathcal{Q})$ (s. 6.21.), so existiert ein $B \in \alpha(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $B \not\subset \mathcal{Q}$
- 2) $B \in \mathcal{P}$ für jedes $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\alpha(X))$ mit $A \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$.

Beweis: Sei $A \notin \mathcal{M}(\mathcal{Q})$. Wir bemerken zunächst, daß dann ein $C_0 \in \mathcal{Q}$ mit $A \cap C_0 = \emptyset$ existiert. Andernfalls wäre nämlich $\mathcal{S} = \mathcal{Q} \cup \{A \cap C \mid C \in \mathcal{Q}\}$ eine Filtersubbasis, $\mathcal{S} \supset \mathcal{Q}$, es gäbe einen maximalen Filter $\mathcal{M} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{Q}$, speziell $A \in \mathcal{M}$. Da aber $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ der einzige maximale Filter ist, der über $\mathcal{Q}$ liegt, heißt das $A \in \mathcal{M}(\mathcal{Q})$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Da $(X, \mathcal{X})$ kompakt ist, gibt es $B, D \in \alpha(X)$ mit $C_0 \subset X - B$, $A \subset X - D$ und $(X - D) \cap (X - B) = \emptyset$, also $B \cup D = X \in \mathcal{Q}$, daher $B \in \mathcal{Q}$ oder $D \in \mathcal{Q}$. Wäre $B \in \mathcal{Q}$, so folgte $B \cap C_0 = \emptyset \in \mathcal{Q}$.

Sei nun $P \in \text{Spec}(\alpha(X))$ mit $A \in \mathcal{A}(P)$; es gilt $B \cup D = X \in P$, also $B \in P$ oder $D \in P$. Wäre $D \in P$, so folgte $D \in \mathcal{A}(P)$, $A \cap D = \emptyset \in \mathcal{A}(P)$. Dies zeigt $B \in P$.

6.23. Lemma: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\mathcal{X}|$, $X \neq \emptyset$. Aufgrund von 6.20. definieren wir eine Abbildung $s: \text{Spec}(\alpha(X)) \longrightarrow X$ wie folgt: Für $P \in \text{Spec}(\alpha(X))$ sei $s(P)$ bestimmt durch $\bigcap_{A \in P} A = \{s(P)\}$. $s: \mathcal{Y}(\alpha(X)) \longrightarrow (X, \mathcal{X})$ ist stetig und surjektiv.

Beweis: s ist stetig: Sei $A \in \alpha(X)$, es ist leicht einzusehen, daß $s^{-1}[A] = \{P \mid P \in \text{Spec}(\alpha(X)), A \in \mathcal{A}(P)\}$. Sei $Q \in \text{Spec}(\alpha(X)) - s^{-1}[A]$, dann existiert nach 6.22. ein $B \in \alpha(X)$ mit $B \not\subset Q$, $B \in P$ für jedes $P \in s^{-1}[A]$. Dies zeigt $Q \in \text{Spec}(\alpha(X)) - \Phi_B \subset \text{Spec}(\alpha(X)) - s^{-1}[A]$, also ist $s^{-1}[A]$ abgeschlossen.

s ist surjektiv, denn offenbar gilt $s(j(x)) = x$ für jedes $x \in X$.

6.24. Satz: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\mathcal{X}|$. Die in 6.23. konstruierte stetige Abbildung s vermittelt eine stetige Abbildung $\hat{s}: T_2(\mathcal{Y}(\alpha(X))) \longrightarrow (X, \mathcal{X})$, und $\hat{s}$ ist topologisch.

Beweis: Im Fall $X = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei $X \neq \emptyset$. s ist stetig und surjektiv; es genügt daher zu zeigen, daß s injektiv ist. Sei $r: \mathcal{Y}(\alpha(X)) \longrightarrow T_2(\mathcal{Y}(\alpha(X)))$ die Reflexionsabbildung. Wir sind offensichtlich am Ziel, wenn wir $r(P) = r(\mathcal{A}(P))$ für jedes $P \in \text{Spec}(\alpha(X))$ nachweisen können. Aus 6.13.2. wissen wir $\{P\}^- = \{Q \mid Q \in \text{Spec}(\alpha(X)), P \subset Q\}$. r ist stetig, also $r(\mathcal{A}(P)) \in r[\{P\}^-] \subset \{r(P)\}^- = \{r(P)\}$.

6.25. Bemerkung: Wir beachten, daß der Beweis zu 6.24. wörtlich übertragen werden kann, wenn mit der T_1 -Reflexion $T_1(\mathcal{Y}(\alpha(X)))$ statt mit $T_2(\mathcal{Y}(\alpha(X)))$ gearbeitet wird, und schließen hieraus $T_1(\mathcal{Y}(\alpha(X))) \cong T_2(\mathcal{Y}(\alpha(X)))$.

6.26. Corollar: Die Funktoren $T_2 \circ \mathcal{Y} \circ \alpha$ und β sind in natürlicher Weise isomorph.

Wir wollen nun auf ein Kompaktifizierungsverfahren eingehen, daß von FRINK [7] vorgeschlagen wurde.

6.27. Def.: Sei $(X, \mathcal{X}) \in \text{TopI}$. Ein System $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Normalbasis**, wenn gilt:

- 1) $\mathcal{Z}$ ist ein Mengenring, d. h. abgeschlossen gegen endliche Durchschnitte und endliche Vereinigungen
- 2) $Z = Z^-$ für jedes $Z \in \mathcal{Z}$, und $\mathcal{Z}$ ist Basis für die abgeschlossenen Mengen
- 3) Sind $W, Z \in \mathcal{Z}$ mit $W \cap Z = \emptyset$, so existieren $A, B \in \mathcal{Z}$ mit $W \subset X - A$, $Z \subset X - B$ und $(X - A) \cap (X - B) = \emptyset$
- 4) Zu jedem $A = A^- \subset X$ und jedem $x \in X - A$ existiert ein $Z \in \mathcal{Z}$ mit $x \in Z$ und $A \cap Z = \emptyset$, d. h. $\mathcal{Z}$ ist disjunktiv.

Ausgehend von einer Normalbasis $\mathcal{Z}$ konstruiert FRINK einen topologischen Raum $w(\mathcal{Z})$ wie folgt: Die Trägermenge von $w(\mathcal{Z})$ wird durch die maximalen Filter in $(\mathcal{Z}, <)$ geliefert; als Basis für die abgeschlossenen Mengen dient das System $\{\Psi(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$, wobei $\Psi(Z) = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in w(\mathcal{Z}), Z \in \mathcal{F}\}$. Wird $i: X \rightarrow w(\mathcal{Z})$ definiert durch $i(x) = \{Z \mid Z \in \mathcal{Z}, x \in Z\}$, so ist $i: X \rightarrow i[X]$ topologisch. Es ist leicht einzusehen, daß $w(\mathcal{Z})$ kompakt ist. Der Zusammenhang mit unserer Konstruktion wird geliefert durch

6.28. Satz: Sei $(X, \mathcal{X}) \in \text{TopI}$, $\mathcal{Z}$ sei Normalbasis. Es gibt dann einen Homöomorphismus $h: T_2(\mathcal{X}(\mathcal{Z})) \rightarrow w(\mathcal{Z})$ mit $h \circ r \circ j = i$, wenn $r: \mathcal{X}(\mathcal{Z}) \rightarrow T_2(\mathcal{X}(\mathcal{Z}))$ die Reflexionsabbildung ist. Überdies gilt $T_2(\mathcal{X}(\mathcal{Z})) \cong T_1(\mathcal{X}(\mathcal{Z}))$.

Beweis: Wir überlegen zunächst, daß zu jedem $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{Z})$ genau ein $\mathcal{U} \in w(\mathcal{Z})$ mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ existiert: 6.5. vermittelt die Existenz mindestens eines $\mathcal{U} \in w(\mathcal{Z})$ mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$. Sei $\mathcal{U} \supset \mathcal{P}$ maximaler Filter. Wäre $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}^-$, so gäbe es $A \in \mathcal{U}$, $A \notin \mathcal{U}^-$. Dann existiert aber $B \in \mathcal{U}^-$ mit $A \cap B = \emptyset$, denn sonst wäre $\mathcal{U} \cup \{A\}$ Subbasis eines Filters, der $\mathcal{U}$ echt umfaßt. Da $\mathcal{Z}$ eine Normalbasis ist, gibt es $C, D \in \mathcal{Z}$ mit $A \subset X - C$, $B \subset X - D$ und $(X - C) \cap (X - D) = \emptyset$, also $C \cup D = X \in \mathcal{P}$, somit $C \in \mathcal{P}$ oder $D \in \mathcal{P}$. Im ersten Fall folgt $A \cap C = \emptyset \in \mathcal{U}$, im zweiten Fall folgt $B \cap D = \emptyset \in \mathcal{U}$.

Hieraus resultiert eine surjektive Abbildung

$\hat{h}: \text{Spec}(\mathcal{Z}) \rightarrow w(\mathcal{Z})$. Wie in 6.23. sehen wir, daß $\hat{h}$ stetig ist, denn $\hat{h}^{-1}[\Psi(Z)] = \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{Z}), Z \in \mathcal{U}(\mathcal{P})\}$. Wie in 6.24. schließlich ist einzusehen, daß ein topologisches

$h: T_2(\mathcal{Y}(\mathcal{Z})) \longrightarrow w(\mathcal{Z})$ existiert mit $h \circ \rho_j = 1$. Auch die Bemerkung 6.25. kann übernommen werden.

Ein weiteres Beispiel für die Möglichkeit, unsere Theorie anzuwenden, erhalten wir wie folgt:

6.29. Def.: Für jedes $(X, \mathcal{X}) \in |\text{Top}|$ sei

$$\mathcal{Z}(X) = \{A \mid A = A^0 = A^- < X\}.$$

6.30. Lemma: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\text{Top}|$, dann gilt $(\mathcal{Z}(X), <) \in \mathcal{W}_d$.

6.31. Lemma: Seien $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y}) \in |\text{Top}|$, $f \in C(X, Y)$. Vermöge

$\mathcal{Z}(f)(A) = f^{-1}[A]$ wird ein $\mathcal{W}_d$ -Morphismus

$$\mathcal{Z}(f): \mathcal{Z}(Y) \longrightarrow \mathcal{Z}(X)$$

definiert. $\mathcal{Z}: \text{Top} \longrightarrow \mathcal{W}_d$ ist kontravarianter Funktor.

6.32. Lemma: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\text{Top}|$. Es existiert dann eine stetige Abbildung $h: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{Y}(\mathcal{Z}(X))$, und es gilt $h[X]^- = \text{Spec}(\mathcal{Z}(X))$. $\mathcal{Y}(\mathcal{Z}(X))$ ist nulldimensional kompakt.

Beweis: Im Falle $X = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei $x \in X$, $h(x) = \{A \mid A \in \mathcal{Z}(X), x \in A\}$. Die Stetigkeit von h wird wie in 6.19. bewiesen, ebenso die Tatsache $h[X]^- = \text{Spec}(\mathcal{Z}(X))$. Wir beachten nun, daß für $A \in \mathcal{Z}(X)$ gilt $X - A \in \mathcal{Z}(X)$; hieraus folgt sofort $\text{Spec}(\mathcal{Z}(X)) - \phi_A = \phi_{X-A}$ für jedes $A \in \mathcal{Z}(X)$: Ist nämlich $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{Z}(X)) - \phi_A$, also $A \notin \mathcal{P}$, so folgt $X - A \in \mathcal{P}$ wegen $A \cup (X - A) = X \in \mathcal{P}$; ist umgekehrt $\mathcal{P} \in \phi_{X-A}$, also $X - A \in \mathcal{P}$, so ist $A \notin \mathcal{P}$, da sonst $A \cap (X - A) = \emptyset \in \mathcal{P}$, also $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{Z}(X)) - \phi_A$.

Die kanonische Basis der Topologie von $\mathcal{Y}(\mathcal{Z}(X))$ besteht daher aus offen-abgeschlossenen Mengen. Schließlich überlegen wir, daß jedes $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{Z}(X))$ ein maximaler Filter ist: Sei $\mathcal{M} > \mathcal{P}$ maximal (Existenz: 6.5.); sei $A \in \mathcal{M}$, dann gilt $X - A \notin \mathcal{M}$, andererseits ist $A \cup (X - A) = X \in \mathcal{P}$, und wir sehen $A \in \mathcal{P}$, also $\mathcal{P} = \mathcal{M}$. 6.13.3. zeigt, daß $\mathcal{Y}(\mathcal{Z}(X))$ ein T_1 -Raum ist; wegen der speziellen Eigenschaft der Basis der Topologie ist $\mathcal{Y}(\mathcal{Z}(X))$ sogar T_2 -Raum.

6.33. Lemma: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\text{Top}|$ quasikompakter T_4 -Raum, $x \in X$;

für die Zusammenhangskomponente K_x von x gilt $K_x = \bigcap_{x \in T, T^0, T^-} T$.

6.34. Satz: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\mathcal{U}|$. Es gibt dann einen Homöomorphismus $t: \mathfrak{Y}(\mathfrak{X}) \longrightarrow (X, \mathfrak{X})$ mit $t \circ h = 1_X$.

Beweis: Sei $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathfrak{Y}(\mathfrak{X}))$; wie in 6.20. überlegen wir, daß $\bigcap_{A \in \mathcal{P}} A$ einelementig ist, hierdurch wird eine Abbildung $t: \text{Spec}(\mathfrak{Y}(\mathfrak{X})) \longrightarrow X$ vermittelt. Ist $A \in \mathfrak{Y}(\mathfrak{X})$, so gilt $t^{-1}[A] = \mathcal{P}_A$, und dies zeigt die Stetigkeit von t . Da offenbar $t \circ h(x) = x$ für jedes $x \in X$, so ist t surjektiv (hier benötigen wir 6.33.). t ist injektiv: Ist $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$, so gibt es $A \in \mathcal{P}$, $A \notin \mathcal{Q}$; dann existiert aber $B \in \mathcal{Q}$ mit $A \cap B = \emptyset$, und wegen $t(\mathcal{P}) \in A$, $t(\mathcal{Q}) \in B$ ist alles gezeigt.

Unsere folgenden Betrachtungen stehen wieder in Zusammenhang mit Kompaktifizierungsproblemen.

6.35. Def.: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$.

- 1) $U \subset X$ heißt regulär-offen, wenn $U = (U^-)^0$.
 - 2) $A \subset X$ heißt regulär-abgeschlossen, wenn $A = (A^0)^-$.
- Die Gesamtheit der regulär-abgeschlossenen Teilmengen von $(X, \mathfrak{X})$ bezeichnen wir mit $\hat{\alpha}(X)$.

6.36. Satz: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$.

- 1) Ist $U \subset X$ regulär-offen, so gilt $X - U \in \hat{\alpha}(X)$
- 2) Die Gesamtheit der regulär-offenen Teilmengen ist eine Boolesche Algebra. Insbesondere gilt:
 $\inf \{U, V\} = U \cap V$, $\sup \{U, V\} = (U \cup V)^{\perp\perp}$ für regulär-offene U, V , wobei $C^\perp = X - C^-$ für $C \subset X$.
- 3) $(\hat{\alpha}(X), \subset)$ ist Boolesche Algebra.

Beweis: 1) ist evident, 2) wurde in [9] bewiesen, 3) folgt mit Hilfe eines naheliegenden Anti-Isomorphismus aus 1) und 2).

6.37. Lemma: Sei $(Y, \mathfrak{Y}) \in |\mathcal{K}|$, $X \subset Y$, $X^- = Y$.

- 1) Durch $A \longmapsto X \cap A$ wird ein $\mathfrak{Y}_\alpha$ -Morphismus $\varepsilon: \hat{\alpha}(Y) \longrightarrow \hat{\alpha}(X)$ definiert. Insbesondere gilt: Bild $\varepsilon \in \mathfrak{No}_\alpha$.
- 2) Für $A \in \hat{\alpha}(Y)$ gilt $\varepsilon(A)^{\bar{\vee}} = A$.

Beweis: Sei $A \in \hat{\mathcal{A}}(Y)$; stets gilt $A^\circ \cap X \subset (A \cap X)^\circ \subset A \cap X$, also $(A^\circ \cap X)^\circ \subset ((A \cap X)^\circ)^\circ \subset A \cap X$. Sei umgekehrt $x \in A \cap X$, $U \cap X \in \hat{\mathcal{A}}_X(x)$ mit $U \in \hat{\mathcal{U}}_Y(x)$; wegen $x \in A = (A^\circ)^\circ$ ist

$U \cap A^\circ \neq \emptyset$, also $U \cap X \cap A^\circ \neq \emptyset$, da X dicht in Y , und dies zeigt $(U \cap X) \cap (A^\circ \cap X) \neq \emptyset$, somit $x \in (A^\circ \cap X)^\circ$. Damit ist $A \cap X \in \hat{\mathcal{A}}(X)$ nachgewiesen.

Daß ϵ Suprema in Suprema überführt, ist klar; seien U, V regulär-offen in Y , dann ist $\epsilon(\inf\{X - U, X - V\}) =$

$$= X \cap (Y - (U \cup V)^\circ)^\circ \stackrel{\text{def}}{=} R, \text{ ferner } \inf\{\epsilon(X - U), \epsilon(X - V)\} =$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} S = X - ((X - (X \cap (Y - U)) \cup (X - (X \cap (Y - V))))^\circ)^\circ =$$

$$= X - ((X \cap U) \cup (X \cap V))^\circ)^\circ. \text{ Es ist klar, daß } R \subset S \text{ gilt; wir}$$

zeigen: $S \subset R$. Zunächst bemerken wir, daß

$$S = ((X \cap U) \cup (X \cap V))^\circ)^\circ = (X - ((X \cap U)^\circ \cup (X \cap V)^\circ))^\circ)^\circ =$$

$$= ((X - (X \cap U)^\circ) \cap (X - (X \cap V)^\circ))^\circ)^\circ. \text{ Sei nun } x \in S; \text{ für jedes}$$

$U' \in \hat{\mathcal{U}}_X(x)$ gilt $U' \cap (X - (X \cap U)^\circ) \cap (X - (X \cap V)^\circ) \neq \emptyset$, wobei

$U' = \hat{U} \cap X$ mit $\hat{U} \in \hat{\mathcal{U}}_Y(x)$. Wir überlegen noch, daß

$$R = X \cap ((U \cup V)^\circ)^\circ = X \cap (Y - (U^\circ \cup V^\circ))^\circ)^\circ =$$

$$= X \cap ((Y - U^\circ) \cap (Y - V^\circ))^\circ)^\circ. x \in R \text{ ist also sicher dann bewiesen, wenn } \hat{U} \cap (Y - U^\circ) \cap (Y - V^\circ) \neq \emptyset \text{ für jedes } \hat{U} \in \hat{\mathcal{U}}_Y(x).$$

Aufgrund der obigen Betrachtung ist dies sicher dann richtig, wenn $X - (X \cap U)^\circ \subset X \cap (Y - U^\circ)$ und $X - (X \cap V)^\circ \subset X \cap (Y - V^\circ)$.

Sei daher $y \in X - (X \cap U)^\circ$, dann gibt es $W \in \hat{\mathcal{U}}_X(y)$ mit

$W \cap (X \cap U) = \emptyset$, $W = \hat{W} \cap X$ mit $\hat{W} \in \hat{\mathcal{U}}_Y(y)$. Wäre $y \in U^\circ$, so müßte

$\hat{W} \cap U \neq \emptyset$ gelten, also $\hat{W} \cap X \cap U \neq \emptyset$, da X dicht ist in Y .

Damit ist $R = S$ gezeigt. ϵ ist also $\mathcal{I}_0$ -Morphismus.

Sei $A \in \hat{\mathcal{A}}(Y)$; wegen $\epsilon(A) \subset A$ gilt $\epsilon(A)^\circ \subset A^\circ = A$. Sei umgekehrt $x \in A = (A^\circ)^\circ$, dann ist $U \cap A^\circ \neq \emptyset$ für jedes $U \in \hat{\mathcal{U}}_Y(x)$,

also auch $U \cap A^\circ \cap X \neq \emptyset$, $U \cap (A \cap X) \neq \emptyset$, $x \in (A \cap X)^\circ = \epsilon(A)^\circ$.

Den nun folgenden Überlegungen legen wir die Situation von 6.37. zugrunde, d. h. $(Y, \mathcal{I})$ sei eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{I})$, in der X dicht liegt. Sei $\mathcal{S} = \text{Bild } \epsilon$; für jedes $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{S})$ definieren wir $\hat{\mathcal{P}} = \{B^\circ \mid B \in \mathcal{P}\}$; wir bemerken $\hat{\mathcal{P}} \subset \hat{\mathcal{A}}(Y)$ gemäß 6.37.2.

6.38. Lemma: Sei $(Z, \mathcal{I}) \in |\text{Top}|$ T_4 -Raum, $A = A^- \subset Z$, $B = B^- \subset Z$, $A \cap B = \emptyset$. Es gibt dann $U, V \in \mathcal{I}$ mit $A \subset U$, $B \subset V$ und $U^- \cap V^- = \emptyset$.

6.39. Lemma: Für jedes $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{F})$ ist $\bigcap_{B \in \mathcal{P}} B$ einelementig.

Beweis: Es ist klar, daß $D = \bigcap_{B \in \mathcal{P}} B \neq \emptyset$. Sei $x \in D, y \in Y - \{x\}$.

Wegen der Regularität von $(Y, \mathcal{O})$ existieren $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U = (U^-)^0, V = (V^-)^0$ und $U \cap V = \emptyset$. Dies zeigt $(Y - U) \cup (Y - V) = Y$, wobei $Y - U, Y - V \in \hat{\mathcal{A}}(Y)$; ferner ist $X = \mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(Y - U) \cup \mathcal{E}(Y - V) \in \mathcal{P}$, also $\mathcal{E}(Y - U) \in \mathcal{P}$ oder $\mathcal{E}(Y - V) \in \mathcal{P}$. Wegen $\mathcal{E}(Y - U)^{\bar{v}} = Y - U, \mathcal{E}(Y - V)^{\bar{v}} = Y - V$ und $x \in D$ sehen wir, daß notwendig $\mathcal{E}(Y - V) \in \mathcal{P}$, somit $Y - V \in \hat{\mathcal{P}}, y \notin D$.

6.40. Lemma: Die vermittle 6.39. naheliegend definierte Abbildung $s: \text{Spec}(\mathcal{F}) \longrightarrow Y$ ist surjektiv und stetig.

Beweis: s ist surjektiv: Sei $x \in Y, \mathcal{L}_x = \{A \mid A \in \hat{\mathcal{A}}(Y), x \in A^0\}, \mathcal{W}_x = \{\mathcal{L}_x\}$. $\mathcal{W}_x$ besitzt offenbar die VEDE, da X dicht ist

in Y . Es existiert also mindestens ein maximaler Filter

$\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{F})$ mit $\mathcal{P} \supset \mathcal{W}_x$. Es gilt sicher dann $s(\mathcal{P}) = x$,

wenn wir $D = \bigcap_{B \in \mathcal{P}} B^{\bar{v}} = \{x\}$ zeigen können. Wegen 6.37.2. wissen

wir, daß $\mathcal{E}(A)^{\bar{v}} = A$ für $A \in \mathcal{L}_x$, somit ist $x \in D$ evident. Ist

$y \in Y - \{x\}$, so gibt es $A = (A^0)^- \in \mathcal{U}(x), B = (B^0)^- \in \mathcal{U}(y)$ mit $x \in A^0, y \in B^0, A \cap B = \emptyset$. Wegen $\mathcal{E}(A) \in \mathcal{W}_x$ und $y \notin \mathcal{E}(A)^{\bar{v}}$ gilt $y \notin D$.

Wir bemerken, daß $\hat{\mathcal{A}}(Y)$ Basis für die abgeschlossenen Mengen von $(Y, \mathcal{O})$ ist. Sei $A \in \hat{\mathcal{A}}(Y)$; wir zeigen, daß $\text{Spec}(\mathcal{F}) - s^{-1}[A]$ offen ist. Sei $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{F}) - s^{-1}[A]$, dann ist $\bigcap_{B \in \mathcal{P}} B^{\bar{v}} \subset Y - A$;

zu jedem $x \in A$ gibt es somit ein $B_x \in \mathcal{P}$ mit $x \in Y - B_x^{\bar{v}}$. Die

Familie $(Y - B_x^{\bar{v}})_{x \in A}$ ist offene Überdeckung der kompakten Teilmenge A , es genügen $Y - B_1^{\bar{v}}, \dots, Y - B_n^{\bar{v}}$ zur Überdeckung von A ,

$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} (Y - B_i^{\bar{v}}), Y - A \supset \bigcap_{1 \leq i \leq n} B_i^{\bar{v}} \supset \inf_{1 \leq i \leq n} B_i^{\bar{v}} = C, C \in \hat{\mathcal{A}}(Y)$,

also $A \cap C = \emptyset$. Gemäß 6.38. existieren $U, V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset (U^-)^0 = U, C \subset (V^-)^0 = V$ und $(U^-)^0 \cap (V^-)^0 = \emptyset$, also

$(Y - U) \cup (Y - V) = Y$. Da $s(\mathcal{P}) \in C$, so sehen wir, daß wegen $\mathcal{E}(Y - U) \cup \mathcal{E}(Y - V) = X \in \mathcal{P}$ notwendig $\mathcal{E}(Y - U) \in \mathcal{P}$ gilt,

also $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{F}) - \Phi_{\mathcal{E}(Y-V)}$. Wir überlegen nun noch, daß

$\text{Spec}(\mathfrak{f}) - \Phi_{\mathfrak{e}(Y-V)} \subset \text{Spec}(\mathfrak{f}) - s^{-1}[A]$. Sei nämlich $\mathfrak{Q} \in \text{Spec}(\mathfrak{f}) - \Phi_{\mathfrak{e}(Y-V)}$, dann gilt notwendig $\mathfrak{e}(Y - U) \in \mathfrak{Q}$, somit $s(\mathfrak{Q}) \in \mathfrak{e}(Y - U)^{\#} = Y - U \subset Y - A$, also $s(\mathfrak{Q}) \notin A$.

6.41. Satz: Sei $(Y, \mathfrak{y}) \in |\mathcal{K}|$, $X \subset Y$, $X^{-} = Y$. Dann existiert eine Quotientenabbildung $\hat{s}: T_2(\text{Spec}(\mathfrak{f})) \longrightarrow Y$.

6.42. Beispiel: Wir wollen nun illustrieren, daß $\hat{s}$ aus 6.41. im allgemeinen kein Homöomorphismus ist. Es sei $(X, \mathfrak{X})$ der diskrete Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $(Y, \mathfrak{y})$ sei die Einpunkt-Kompaktifizierung von $(X, \mathfrak{X})$. Man sieht dann $\mathfrak{f} = \mathcal{A}(\mathbb{N})$, und $T_2(\text{Spec}(\mathfrak{f})) = \beta \mathbb{N}$.

Zum Abschluß unserer Betrachtungen wollen wir untersuchen, wann sich stetige Abbildungen auf Primspektren fortsetzen lassen. Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}|$; $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}(X)$ sei Basis der abgeschlossenen Mengen derart, daß $(\mathcal{L}, \subset) \in |\mathcal{O}_a|$. Wir erhalten dann wie in 6.19. eine stetige Abbildung $j: (X, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{Y}(\mathcal{L})$ mit $j[X]^{-} = \text{Spec}(\mathcal{L})$. j ist Einbettung, falls $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}_0|$.

6.43. Def.: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}_0|$; $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}(X)$ heißt F-Basis von $(X, \mathfrak{X})$ (F erinnere an "Fortsetzbarkeit"), wenn $(\mathcal{L}, \subset) \in |\mathcal{O}_a|$ Basis der abgeschlossenen Mengen von $(X, \mathfrak{X})$ ist und überdies gilt:

$$A \in \mathcal{L} \implies (X - A)^{-} \in \mathcal{L}.$$

6.44. Def.: Sei $(X, \mathfrak{X}) \in |\text{Top}_0|$, $\mathcal{L}$ sei F-Basis von $(X, \mathfrak{X})$. Ist $(Y, \mathfrak{y}) \in |\text{Top}|$, $f \in C(X, Y)$, so nennen wir f $\mathcal{L}$ -stetig, wenn gilt:

- 1) $f[X]^{-}$ ist quasikompakt
- 2) Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von $(Y, \mathfrak{y})$ gibt es endlich viele $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}$ und eine Abbildung

$$\phi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow I \text{ so, daß } \bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k = \emptyset \text{ und } f[X - A_k] \subset U_{\phi(k)}$$

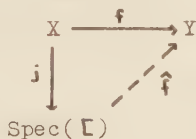
für jedes k .

6.45. Bemerkung: Ist $(Y, \mathfrak{y})$ regulär, so folgt 6.44.1. aus 6.44.2.: Sei nämlich $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f[X]^{-}$; wir fügen $U_0 = Y - f[X]^{-}$ hinzu und erhalten eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I_0}$, $I_0 = I \cup \{0\}$, von $(Y, \mathfrak{y})$. Es existiert eine

offene Überdeckung $(V_\alpha)_{\alpha \in J}$ so, daß $(V_\alpha^-)_{\alpha \in J}$ Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I_0}$ ist; sei $\tau : J \longrightarrow I_0$ Verfeinerungsabbildung. Es gibt nun $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}$ und $\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow J$ so, daß $\bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k = \emptyset$, $f[X - A_k] \subset V_{\sigma(k)}$. Sei $f(x) \in f[X]$; es gibt k so, daß $x \in X - A_k$, also $f(x) \in f[X - A_k] \subset V_{\sigma(k)}$. $(V_{\sigma(k)})_{1 \leq k \leq n}$ ist also Überdeckung von $f[X]$, daher wird $f[X]^-$ durch $(V_{\sigma(k)}^-)_{1 \leq k \leq n}$, also auch durch $(U_{\tau(\sigma(k))})_{1 \leq k \leq n}$ überdeckt.

6.46. Satz: Sei $(X, \mathcal{X}) \in |\text{Top}_0|$, $\mathcal{L}$ sei F-Basis von $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y}) \in |\text{Top}|$ sei regulär. Dann gilt:
 $f \in C(X, Y)$ läßt sich genau dann stetig auf $\mathcal{Y}(\mathcal{L})$ fortsetzen (und dann auch eindeutig), wenn $f|_{\mathcal{L}}$ stetig ist.

Beweis: Sei $f|_{\mathcal{L}}$ stetig. Falls eine stetige Fortsetzung $\hat{f} : \mathcal{Y}(\mathcal{L}) \longrightarrow (Y, \mathcal{Y})$ existiert, so ist dieselbe notwendig eindeutig, da $j[X]$ dicht ist und $(Y, \mathcal{Y})$ T_2 -Raum ist. Sei $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{L}) - j[X]$, offenbar ist dann $\bigcap_{A \in \mathcal{P}} f[A]^- \neq \emptyset$, sei $\xi \in \bigcap_{A \in \mathcal{P}} f[A]^-$ ausgewählt.



Wir definieren $\hat{f}(\mathcal{P}) = \xi$. Im Fall $\mathcal{P} = j(x)$, $x \in X$, beachten wir, daß j injektiv ist und definieren $\hat{f}(\mathcal{P}) = f(x)$; auch hier gilt $\hat{f}(\mathcal{P}) \in \bigcap_{A \in \mathcal{P}} f[A]^-$. Wir zeigen nun, daß $\hat{f}$ stetig ist.

Sei $\xi = \hat{f}(\mathcal{P})$ gegeben, $U \in \mathcal{U}(\xi)$; es gibt $V, W \in \mathcal{U}(\xi)$ so, daß $V^- \subset U$, $W^- \subset V$. $\{U_1 = V, U_2 = Y - W^-\}$ ist offene Überdeckung von $(Y, \mathcal{Y})$, es gibt $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}$ und $\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2\}$ mit $\bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k = \emptyset$, $f[X - A_k] \subset U_{\sigma(k)}$. Sei K die Gesamtheit aller $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $f[X - A_k] \subset U_2$, $B = \bigcup_{k \in K} (X - A_k)^-$, $B \in \mathcal{L}$.

Wäre $\mathcal{P} \in \Phi_B$, so folgte $\xi = \hat{f}(\mathcal{P}) \in f[B]^- \subset \bigcup_{k \in K} (f[X - A_k])^- \subset$

$\subset (Y - W^-)^- = Y - (W^-)^0 \subset Y - W$, und dies ist unmöglich.
 Wir sehen: $\mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{L}) - \Phi_B$. Ist weiter $\mathcal{Q} \in \text{Spec}(\mathcal{L}) - \Phi_B$,

so gilt $B \notin \mathcal{Q}$, also $(X - A_j)^- \in \mathcal{Q}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\} - K$,
somit $\hat{f}(\mathcal{Q}) \in f[X - A_j]^- \subset V^- \subset U$.

Sei umgekehrt f stetig fortsetzbar zu $\hat{f}$; da $\mathcal{V}(\square)$ quasikom-
pakt ist, ist $\hat{f}[\text{Spec}(\square)]$ quasikompaakt, mithin abgeschlossen.
Wegen $f[X] = \hat{f} \circ j[X] \subset \hat{f}[\text{Spec}(\square)]$ ist $f[X]^- \subset \hat{f}[\text{Spec}(\square)]$,
 $f[X]^-$ ist daher quasikompaakt.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $(Y, \mathcal{Y})$. $(\hat{f}^{-1}[U_i])_{i \in I}$ ist
offene Überdeckung von $\mathcal{V}(\square)$, jedes $\hat{f}^{-1}[U_i]$ läßt sich als
Vereinigung gewisser $\text{Spec}(\square) - \Phi_{A_j}$, $j \in J_i$, darstellen; es
genügen $(\text{Spec}(\square) - \Phi_{A_{j_n}})_{1 \leq n \leq n_i}$ zur Überdeckung von $\mathcal{V}(\square)$, und
wir konstruieren eine Abbildung $\delta: \{1, \dots, n\} \rightarrow I$ unter
Benutzung von $\text{Spec}(\square) - \Phi_{A_{j_n}} \subset \hat{f}^{-1}[U_i]$ mit geeignetem i .

$\bigcap_{1 \leq k \leq n} A_{j_k} = \emptyset$ ist unmittelbar klar; ist überdies $x \in X - A_{j_k}$,
so gilt $f(x) = \hat{f} \circ j(x) \in \hat{f}[\text{Spec}(\square) - \Phi_{A_{j_k}}] \subset U_{\delta(k)}$.

6.47. Bemerkung: Das Ergebnis von 6.46. können wir im Fall
 $\square = \mathcal{O}(X)$ auch unmittelbar aus Satz 2.1. von [11] gewin-
nen: Sei nämlich $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(Y)$ mit $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset$. $(Y - B)_{B \in \mathcal{B}}$ ist
offene Überdeckung von $(Y, \mathcal{Y})$.

1) Sei $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}[B]^{-\mathcal{Y}(Y)} = \emptyset$. Wegen der Quasikompaaktheit von

$\mathcal{V}(\square)$ existiert ein endliches Teilsystem $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ so, daß
 $\bigcap_{B \in \mathcal{B}'} f^{-1}[B]^{-\mathcal{Y}(Y)} = \emptyset$, andererseits ist $f^{-1}[B]^{-\mathcal{Y}(Y)} = \Phi_{f^{-1}[B]}$.

Aus $\bigcap_{B \in \mathcal{B}'} \Phi_{f^{-1}[B]} = \emptyset$ folgt sofort $\bigcap_{B \in \mathcal{B}'} f^{-1}[B] = \emptyset$, ferner ist

$f[X - f^{-1}[B]] \subset Y - B$. Aufgrund von 6.45. ist f $\square$ -stetig.

2) Sei umgekehrt f $\square$ -stetig. Es gibt $A_1, \dots, A_n \in \square$ und eine
Abbildung $\delta: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{B}$ so, daß $\bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k = \emptyset$ und

$f[X - A_k] \subset Y - \delta(k)$. Dies zeigt $X - A_k \subset f^{-1}[f[X - A_k]] \subset$
 $\subset f^{-1}[Y - \delta(k)]$, also $f^{-1}[\delta(k)] \subset A_k$, es folgt

$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}[B] \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} f^{-1}[\delta(k)] \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k = \emptyset$. Hieraus

folgt $\bigcap_{1 \leq k \leq n} \Phi_{f^{-1}[\delta(k)]} = \emptyset$, $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \Phi_{f^{-1}[B]} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}[B]^{-\mathcal{Y}(Y)} = \emptyset$.

FRINK hat in [7] einen ähnlichen Satz für Ultrafilterräume

bewiesen; er benötigt dort nicht die Voraussetzung, daß eine F -Basis ist. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, daß die Topologie des Primspektrums nicht dieselben erfreulichen Eigenschaften wie die der Ultrafilterräume besitzt, genauer: Ist $A \in \mathcal{L}$, so definieren wir

$$(X - A)^* = \{ \mathcal{P} \mid \mathcal{P} \in \text{Spec}(\mathcal{L}), \text{ es gibt } B \in \mathcal{P} \text{ mit } B \subset X - A \}.$$

Es ist dann $(X - A)^* = \text{Spec}(\mathcal{L}) - \Phi_A$ im allgemeinen falsch;

sind $A, B \in \mathcal{L}$, so ist auch $(X - A)^* \cup (X - B)^* = (X - (A \cap B))^*$ im allgemeinen falsch, im Gegensatz zu den Ultrafilterräumen, bei denen in beiden Fällen stets die Gleichheit gilt.

Literatur

=====

- [1] A l e x a n d r o f f, P.: Diskrete Räume; Matematischeskii Sbornik 44 (N.S. 2) 1937, 501 - 519
- [2] B a n a s c h e w s k i / B r u n s: Categorical Characterization of the MacNeille Completion; Arch. Math. 18 (1967), 369 - 377
- [3] B i r k h o f f / F r i n k: Representation of lattices by sets; Trans. AMS 64 (1948), 299 - 316
- [4] B o u r b a k i, N.: Eléments de mathématique, Livre I, Chap. 3
- [5] B o u r b a k i, N.: Eléments de mathématique, Livre III, Chap. 1
- [6] D e r d é r i a n, J.-C.: A completion for partially ordered sets; J. London Math. Soc. 44 (1969), 360
- [7] F r i n k, O.: Compactifications and semi-normal spaces; Amer. J. Math. 86 (1964), 602 - 607
- [8] G e r i c k e, H.: Theorie der Verbände; B-I-Hochschultaschenbücher 38/38a
- [9] H a l m o s, P.R.: Lectures on Boolean algebras; Princeton 1963
- [10] H e r r l i c h, H.: Topologische Reflexionen und Coreflexionen; Lecture Notes in Mathematics Nr. 78, Berlin - Heidelberg - New York 1968
- [11] H e r r l i c h, H.: Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen und Kompaktheitsgrad topologischer Räume; Math. Z. 96 (1967), 64 - 72
- [12] R a n e y, G.N.: Completely distributive complete lattices; Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 677 - 680

Lebenslauf

=====

Ich wurde am 29. Oktober 1940 in Berlin geboren. Vom Herbst 1946 bis Ostern 1952 besuchte ich die 3. Grundschule Berlin-Schöneberg, anschließend die Sophie-Scholl-Schule in Berlin-Schöneberg, woselbst ich im März 1958 die Reifeprüfung ablegte.

Vom April 1958 bis September 1960 absolvierte ich eine Lehre als Bankkaufmann bei der Berliner Bank AG und war vom Oktober 1960 bis Dezember 1960 bei der Berliner Bank AG, vom Januar 1961 bis April 1962 im Bankhaus Delbrück Schickler & Co angestellt.

Seit dem Sommersemester 1962 studiere ich an der Freien Universität Berlin Mathematik, Physik und Statistik. Meine Hochschullehrer waren die Professoren Berger, Dinghas, Gottschling, Grotemeyer, Lassen, Mertsch, Meschkowski, Münzner, Nicolas, Orsinger, Pachale, Päsler, Ringel, Scherhag, Stöhr und Wünsche, die Privatdozenten Dr. Herrlich und Dr. Schiffels sowie Dr. Engel.

Die Diplomvorprüfung bestand ich 1964, die Diplomhauptprüfung in Mathematik 1966.

Seit Juli 1966 bin ich an der Freien Universität Berlin als wissenschaftlicher Mitarbeiter beschäftigt.

Peter Ringleb

